

## Argomenti trattati a lezione durante l'AA 2019/20

Obiettivi del corso. Necessità di una teoria dell'integrazione differente da quella elementare. Introduzione alla teoria per funzioni di variabile complesse che tiene conto della struttura algebrica.

### **Analisi reale**

**1. Teoria della misura e dell'integrazione astratta:** Definizione di sigma-algebra. Confronto con la topologia. Definizione di funzione misurabile. Confronto con la continuità. Sigma-algebre generate da famiglie di sottoinsiemi. Sigma-algebra di Borel.

Funzioni boreliane. Criterio per la misurabilità di funzioni numeriche. Richiami su minimo limite e massimo limite. Misurabilità del limite di funzioni misurabili. Funzioni semplici.

Approssimazioni di funzioni misurabili tramite funzioni semplici. Definizione di misura. Proprietà elementari delle misure. Definizione di integrale di Lebesgue per funzioni positive. Misura che conta i punti. Delta di Dirac.

Prime proprietà dell'integrale di Lebesgue. Teorema di Beppo Levi. Integrali per serie positive. Misure generate da funzioni positive misurabili.

Esempi e controesempi su misure indotte. Somma di infiniti numeri. Serie come integrali. Lemma di Fatou

Lemma di Fatou. Integrazione di funzioni a valori complessi. Disuguaglianza triangolare. Teorema della convergenza dominata di Lebesgue. Esempi e controesempi. Ruolo degli insiemi di misura nulla

Misure complete e completamento di una misura. Generalizzazione del teorema di convergenza dominata. Esempi e applicazioni. Passaggio al quoziente di  $L^1$  attraverso la relazione q.o.

Convergenza quasi uniforme. Teorema di Severini Egorov. Assoluta continuità delle misure. Assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue. Equintegrabilità di una famiglia di funzioni. Teorema di Vitali.

**2. Misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^N$ :** Richiami sulla misura di Peano-Jordan. Condizione necessaria per la definizione della misura di Lebesgue sugli aperti e sui compatti.

Misura interna e misura esterna. Definizione di insieme limitato misurabile. Misurabilità degli aperti limitati e dei compatti. Numerabile subadditività della misura di Lebesgue sugli aperti e della misura esterna. Confronti con la misura di Peano-Jordan. I limitati misurabili sono chiusi rispetto alle operazioni insiemistiche finite.

Numerabile additività per limitati misurabili. Definizione generale di insieme misurabile secondo Lebesgue e loro misure. Compatibilità con le altre definizioni. Regolarità della misura di Lebesgue.

Misure invarianti per traslazione e loro caratterizzazione. Misura di Lebesgue e applicazioni lineari: interpretazione geometrica del determinante di una applicazione.

Esistenza di insiemi non misurabili secondo Lebesgue. Inclusioni delle sigma-algebre dei boreliani dei misurabili e delle parti di  $\mathbb{R}^N$ . Costruzione dell'insieme di Cantor. Esempi e controesempi.

**3. Gli spazi  $L^p$ :** Lemma di Uryshon. Teorema di Lusin e sue conseguenze. I tre principi di Littlewood. Richiami sulle funzioni convesse. Disuguaglianza di Jensen. Disuguaglianza di Holder. Disuguaglianza di Minkowski

Estremo superiore essenziale. Spazi  $L^p$ . Disuguaglianza di Holder e Minkowski in  $L^p$ . Completezza di  $L^p$ . Densità delle funzioni semplici in  $L^p$ .

Densità delle funzioni continue a supporto compatto in  $L^p(\mathbb{R}^N)$ . Il completamento di  $C_c(\mathbb{R}^N)$  nella norma infinito. Relazioni tra spazi  $L^p$ . Spazi  $l^p$ .

Generalizzazione della disuguaglianza di Holder. Separabilità degli spazi  $L^p$ . Cenni al teorema di rappresentazione di Riesz per funzionali positivi

**4. Teoria elementare degli spazi di Hilbert:** Prodotti scalari e loro proprietà (disuguaglianza di Schwarz, triangolare). Spazi di Hilbert: definizione ed esempi. Spazi ortogonali. Teorema di Pitagora. Identità del parallelogramma. Identità di polarizzazione.

Teorema di minima norma. Teorema dei proiettori ortogonali. Teorema di rappresentazione di Riesz.

Problema della miglior approssimazione. Sistemi ortonormali e coefficienti di Fourier. Disuguaglianza di Bessel. Caratterizzazione degli insiemi ortonormali massimali. Esistenza di sistemi ortonormali massimali. Identità di Bessel e di Parseval. Isomorfismo tra uno spazio di Hilbert e  $l^2(A)$ . Separabilità dello spazio e numerabilità delle basi di Hilbert.

Lo spazio  $L^2(T)$ . Il sistema ortonormale trigonometrico: Densità dei polinomi trigonometrici nelle funzioni continue periodiche e in  $L^2(T)$ . Derivata debole attraverso i coefficienti di Fourier. Lo spazio  $H^1(T)$ : definizione, completezza e una sua base di Hilbert.

Spazi  $H^k(T)$ : definizioni, proprietà (completezza, basi, norme equivalenti). Spazi  $H^s(T)$ , ad esponente frazionario: definizioni, proprietà (completezza, basi, norme equivalenti). Teorema di Immersione di  $H^s(T)$  in  $C^k(T)$ . Regolarità olomorfa delle serie di Fourier.

Applicazioni della teoria di spazi di Hilbert alle equazioni differenziali ordinarie. Cenni di applicazione alle equazioni alle derivate parziali.

Applicazioni della teoria di spazi di Hilbert: soluzione dell'equazione del calore su un anello; problema isoperimetrico nel piano.

### **Analisi complessa**

**5. Introduzione alla teoria delle funzioni olomorfe:** Richiami sui numeri complessi, aspetti algebrici e topologici. Continuità delle funzioni complesse di variabile complessa.

Olomorfia. Relazioni di Cauchy-Riemann. Raffronto tra la differenziabilità e la derivabilità in senso complesso.

Condizioni di Cauchy Riemann e prime conseguenze. Mappe conformi. Rappresentazione conforme delle funzioni complesse.

Funzioni multivoche. Funzione argmoneta e sue selezioni. Proprietà della funzione esponenziale, Logaritmo, funzioni seno e coseno con le loro inverse.

Richiami sulle curve. Cammini orientati. Definizione di integrale lungo un cammino orientato e sue relazioni con le forme differenziali. Proprietà degli integrali. Relazioni tra integrali e primitiva.

Esistenza di funzioni olomorfe prive di primitiva. Richiami sulle serie di funzioni. Serie di potenze in campo complesso: Insieme di convergenza, convergenze assoluta e uniforme. Serie geometrica.

Olomorfia delle serie di potenze. Somma per parti, test Abel Dirichlet. e Teorema di Abel. Esercizi sulle serie di potenze. Risoluzioni di equazioni differenziali per serie.

**6. Teorema di Cauchy e analiticità delle funzioni olomorfe:** Analiticità degli integrali a la Cauchy. Teorema dell'indice di avvolgimento. Teorema di Goursat.

Teorema di esistenza di una primitiva di una funzione olomorfa in un convesso.  
Teorema di rappresentazione di Cauchy in un convesso. Analiticità delle funzioni olomorfe. Teorema di Morera. Circuiti omotopi.

Invarianza degli integrali di funzioni olomorfe per omotopia. Formule di Cauchy per funzioni olomorfe su un aperto qualsiasi. Stime per le derivate di una funzione olomorfa. Teorema di Liouville e sue generalizzazioni. Teorema fondamentale dell'algebra.

Teorema di Morera-Weierstrass per successioni e per funzioni. Esercizi sugli integrali di funzioni olomorfe. Relazione tra circuiti omologhi e circuiti omotopi.

**7. Teorema degli zeri e funzioni armoniche:** Teorema degli zeri di funzioni olomorfe. Teorema di unicità del prolungamento olomorfo. Esempi. Caratterizzazione dell'analiticità delle funzioni di variabile reale attraverso le stime sulle derivate e come traccia reale di funzioni olomorfe.

Principi di massimo per funzioni armoniche. Teorema di Liouville per funzioni armoniche. Disuguaglianza di Harnack. Teorema di Liouville per funzioni olomorfe. Principi di minimo e massimo modulo per funzioni olomorfe.

**8. Teorema dei residui e applicazioni:** Serie di Laurent. Sviluppabilità in serie di Laurent. Singolarità isolate e loro classificazione. Caratterizzazione delle singolarità eliminabili. Esempi.

Caratterizzazione dei poli, Caratterizzazione delle singolarità essenziali. Teorema di Picard (solo enunciato). Teorema dei residui.

Calcolo dei residui nei poli. Funzioni meromorfe. Teorema dell'indice logaritmico. Teorema di Rouché. Continuità delle radici di un polinomio rispetto ai coefficienti. Teorema della mappa aperta, teorema di risolubilità locale.

Esercizi sul calcolo della serie di Laurent e dei residui. Calcolo di integrali di funzioni razionali di trigonometriche attraverso i residui.

Integrali di Lebesgue, impropri e a valor principale: definizioni, relazioni esempi e controesempi. Lemma di Jordan. Applicazioni del teorema dei residui al calcolo di integrali reali.

Lemma di Jordan II parte. Applicazioni del teorema dei residui: calcolo di integrali, trasformata di Fourier, calcolo della somma di una serie.