1.1 Esercizi

Esercizio 5 *Si dimostri che sul campo complesso non è possibile definire una relazione d'ordine compatibile con le leggi di campo, ossia una relazione "$\geq$" tale che*

$$\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0 : z > 0 \;\; oppure - z > 0 \; (ma\ non\ entrambe)$$
$$z, w \in \mathbb{C}, t.c. w > 0, z > 0 \Rightarrow zw > 0, \; z + w > 0.$$

Esercizio 6 *Trovare i numeri complessi z_1 e z_2 tali che*

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

Esercizio 7 *Disegnare gli insiemi definiti dalle seguenti relazioni*

$$\{z \in \mathbb{C} |\ Re(z+1) = |z-1|\}, \quad \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = \lambda |z-1|\}$$

Esercizio 8 *Find the real numbers p and q such that the complex numbers $z = p - iq$ and $w = p + i\frac{1}{q}$ be equal.*

Esercizio 9 *Prove that*

$$Re(\sum_{j=1}^{n} z_j) = \sum_{j=1}^{n} Re(z_j)$$

Esercizio 10 *Find for $z = 1 + 2i$ the following numbers z^n; $1/z$; $1/z^n$; $z^2 + 2z + 5 + i$.*

Esercizio 11 *Find the positions of the following points in the complex plane: $a + ia$; $a - ia$; $-a + ia$; $-a - ia$; for $a \in \mathbb{R}$.*

Esercizio 12 *Which subsets of the complex plain correspond to the complex numbers with the following properties:*

$$Rez = Imz; \quad Rez < 1; \quad -1 < Rez \leq 1; \quad Imz \geq 0; \quad |z| \leq 2$$
$$1 < |z| < 3; \quad |z| > 2; \quad -\pi < argz < \pi; \quad \frac{\pi}{6} < argz < \frac{\pi}{4}.$$

Esercizio 13 *Si provi che per ogni $z \in \mathbb{C}$ risulta*

$$|z| \leq |\Re ez| + |\Im mz| \leq \sqrt{2}\,|z|.$$

Esercizio 14 *Let $\mathbb{C}^*$ the set of all complex numbers different from zero.*

a) Prove that the set T of all complex numbers with modulus 1 is a multiplicative subgroup of the group $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

b) The multiplicative group $\mathbb{C}^*$ is isomorphic with $\mathbb{R}_+ \times T$.

Esercizio 15 *Fissato z_0 trovare i punti z tali che*

a) $|z-z_0| = 1$;
b) $|z+z_0| = 1$;
c) $\arg(z \cdot z_0) = \frac{\pi}{4}$.

Esercizio 16 *Find where the points in the complex plane are if*

a) $|z-1| < 2$;
b) $|z+i| > 1$;
c) $|z-zo| < r$;
d) $\arg(z-1) = \frac{\pi}{4}$;
e) $\frac{z}{\bar{z}} = i$

Esercizio 17 *Si provi che per ogni $u, v \in \mathbb{C}$ risulta*

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

e darne una interpretazione geometrica.

Esercizio 18 *Find which of the following sequences are bounded:*

$$\{i^n\}; \quad \{(\frac{1}{1+i})^n\}; \quad \{(\frac{1+1}{1-i})^n\}; \quad \{n^2(i^n-1)\}; \quad \{\frac{2n}{n+1} = i\frac{n-1}{2n-1}\}.$$

Esercizio 19 *Quali sono i punti di accumulazione delle successioni dell'esercizio precedente.*

Esercizio 20 *Come si può esprimere (sempre che si possa) la convergenza $z_n \to z$ in coordinate polari?*

Esercizio 21 *Sia $\{a_n\}$ una successione limitata. Si provi che anche le seguenti successioni sono limitate*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j; \quad \{\sqrt[n]{\Pi_{j=1}^{n} a_j}\}; \quad \{\frac{\sum_{j=1}^{n} p_j a_j}{\sum_{j=1}^{n} p_j}\} \text{ qualunque sia la successione } \{p_n\} \text{ tali che } p_n > 0.$$

Esercizio 22 *Let t be a real parameter and let $z_1 := (\rho_1, \theta_1)$ and $z_2 := (\rho_2, \theta_2)$ be fixed numbers. Which are (in the complex plain) the curves defined by the following relations ?*

a) $z = (2,t)$ $0 \le t < 2\pi$.
b) $z = (t, \frac{\pi}{3})$, $t > 0$;
c) $z = z_1 + \cos t + i \sin t$, $0 < t < 2\pi$;
d) $z = z_1 t(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ $t \ge 0$;
e) $z = z_1 + z_2(\cos t + i \sin t)$, $0 < t \le 2\pi$;
f) $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $0 \le t \le 2\pi$.
g) $z = z_1(\cos t + i\sin t) + z_2(\cos t - i \sin t)$, $0 < t \le 2\pi$;
h) $z = t + (\cos t + i \sin t)$, $t > 0$.