2.4 Esercizi

Teorema 2.31 *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e $K \subset \mathbb{R}^d$ compatto $g : \Omega \times K \to \mathbb{C}$ continua con le sue derivate rispetto a x, y e tale che per ogni $\xi \in K$ risulta $g(\cdot, \xi) \in H(\Omega) \cap \mathscr{C}^1(\Omega)$. Allora la funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definita come*

$$f(z) := \int_K g(z, \xi) d\xi \quad \text{per} z \in \Omega$$

è olomorfa (di classe $\mathscr{C}^1$).

Esercizio 31 *Dimostrare che la funzione $f(z) := \int_0^1 e^{tz} dt$ è olomorfa intera. La si può conoscee splicitamente?*

Esercizio 32 *Quali sono le condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari?*

Esercizio 33 *Quali sono le funzioni complesse f che soddisfano l'equazione differenziale (in $\mathbb{C}$) $f' = f$ con $f(0) = 1$?*

Esercizio 34 *Usando le condizioni di Cauchy-Riemann trovare tutte le soluzioni del problema $f' = f$ in $\mathbb{C}$.*

Definizione 2.32 *Diremo che f è* antiolomorfa *se $\overline{f} \in H(\Omega)$ e scriveremo $f \in \overline{H}(\Omega)$.*

Esercizio 35 *Sia Ω è aperto connesso. Se $f \in H(\Omega) \cap \overline{H}(\Omega)$ allora f è costante.*

Esercizio 36 $\frac{z}{|z|^2}$ *è olomorfa?*

Esercizio 37 $f \in H(\Omega)$, $g \in \overline{H}(\Omega)$. $f \cdot g \in ?$