4.3 Esercizi

Esercizio 42 *Show that if* $\{(a_n\}$ *and* $\{b_n\}$ *satify the conditions:*

(1) the sequence $\{S_n\}$ *is bounded, where* $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$,

(2) $\lim b_n = 0$,

(3) $\sum^{\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty$,

then the series $\sum^{\infty} a_n b_n$ *is convergent.*

Esercizio 43 *Let* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *two complex sequences such that* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}$. *If* $\sum b_n$ *is absolutely convergent, then* $\sum a_n$ *is absolutely convergent*

Esercizio 44 *Let* $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *and* $\limsup_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$. *Show that if*

$$\limsup_n n\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - 1\right) < -1,$$

then $\sum^{\infty} a_n$ *is absolutely convergent.*

Esercizio 45 *Let* $\{a_n\}$ *be a sequence of positive numbers that converges to zero monotonically. Prove:*

(1) If R *is the radius of convergence of the series* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *then* $R \geq 1$.

(2) If $R = 1$ *then the series* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *is convergent on* $\partial D(0,R) \setminus \{R\}$.

(3) if $R > 1$ *is it still true that the series* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *on convereges* $\partial D(0,R) \setminus \{R\}$*?*

Esercizio 46 *Show that the power series* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *is uniformly convergent on its disc of convergence* D *if and only if it is uniformly convergent on* $\overline{D}$.

Esercizio 47 *Let* R *be the radius of convergence of the serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$. *Assume that* $R = 1$ *and let* $|z_0| = 1$. *Prove that if* $\lim_n n a_n = 0$ *and* $\lim_{r \to 1} f(rz_0)$ *exists, then* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ *converges to* $\lim_{r \to 1} f(rz_0)$

Per $0 < \alpha < \pi$ fissato nel seguito con S_α indicheremo il settore $S_\alpha := \{z \in \mathbb{C}, -\alpha \leq arg_0 z \leq \alpha\}$.

Esercizio 48 *Sia* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ *e per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *sia* $z_n \in \bar{S}_\alpha$ *una successione. Dimostrare che la serie* $\sum_n z_n$ *converge se e solo se converge assolutamente.*

Dimostrare che non è vero se $z_n \in \{z \in \mathbb{C}, -\frac{\pi}{2} < arg_0 z < \frac{\pi}{2}\}$.

Esercizio 49 *Sia* z_n *una successione di numeri complessi tali che* $Re(z_n) \geq 0$ *e che* $\sum_n z_n$ *sia convergente. Dimostrare che* $\sum_n z_n^2$ *converge se e solo se converge assolutamente.*

Esercizio 50 *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $c_n \in \mathbb{C}$ e poniamo $f(z) := \sum_n c_n z^n$. Supponiamo che esista $k \in \mathbb{N}$ tale che $c_{n+k} = c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Provare che il disco di convergenza di f è il disco unitario e che f è una funzione razionale $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ con Q polinomio avente gli zeri sulla circonferenza unitaria.*

Esercizio 51 *Analogamente al precedente problema ma supponendo che esista $k \in \mathbb{N}$ tale che $c_{n+k} = \frac{c_n}{k}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Cosa possiamo dedurre?*

Esercizio 52 (Trasformata di Laplace) *Sia $f \in \mathscr{C}([0,+\infty[)$. Per $z \in \mathbb{C}$, definiamo*

$$\mathcal{L}(f)(z) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}\,dt.$$

Sia $P := \{f \in \mathscr{C}([0,+\infty[)$ con crescita polinomiale$\}$. Dopo aver fatto vedere che tale definizione è ben posta per $Re(z) > 0$ se $f \in P$, si dimostri che

a $\mathcal{L}(f)$ *è olomorfa in* $Re(z) > 0$ *e* $\mathcal{L}(f)'(z) = -\int_0^{+\infty} t f(t)e^{-zt}dt = -\mathcal{L}(tf(t))$;

b *posto* $F(x) := \int_0^x f$, *risulta* $\mathcal{L}(f) = z\mathcal{L}(F)(z)$ *o equivalentemente* $\mathcal{L}(F)(z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}(f)(z)$;

c *se* $f(0) = 0$ *ed* f *ha derivata* $f' \in P$ *allora,* $\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z)$.

Esercizio 53 *Calcolare la somma della serie*

$$\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} - \frac{1}{7\cdot 8} + \cdots$$