Forme differenziali

$\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$. Supporremo sempre che $a, b \in \mathscr{C}(\Omega)$. Inoltre confonderemo, con abuso, il campo vettoriale $\binom{a(x,y)}{b(x,y)}$ con la forma differenziale.

Sia ω forma differenziale continua in Ω e $\gamma : [0,1] \to \Omega$ un cammino in Ω. Si pone

$$\int_\gamma \omega := \int_0^1 (a(\gamma(t))\gamma_1'(t) + b(\gamma(t))\gamma_2'(t))dt.$$

Tale definizione non dipenda dalla particolare rappresentazione del cammino.

Proposizione 3.10 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *$\omega_1$ e ω_2 f.d. continue su Ω. γ cammino in Ω.*

1. $\int_\gamma \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 = \alpha \int_\gamma \omega_1 + \beta \int_\gamma \omega_2$;
2. $\int_{\gamma^-} \omega_1 = -\int_\gamma \omega_1$;
3. *se* $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ *allora* $\int_\gamma \omega_1 = \int_{\gamma_1} \omega_1 + \int_{\gamma_2} \omega_1$.

Definizione 3.11 *Sia $\omega := a(x,y)dx + b(x,y)dy$ una forma differenziale continua. Diremo che ω è una* forma differenziale esatta *se esite $u \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ tale che $du = \omega$, ossia $u_x = a$ e $u_y = b$. Tale funzione u si dice* primitiva *di ω.*

Osservazione 3.12 *Linguaggio fisico: un campo vettoriale rappresenta un campo di forze le cui componenti possono essere identificate con le componenti di una forma differenziale (stabilendo così una relazione uno a uno tra forse e forme differenziali). L'integrale della forma differenziale corrisponde al lavoro fatto dalle forze lungo il cammino. La primitiva si dice anche potenziale. Se un campo di forze ha potenziale allora si parla di forze conservative, cioé le forze conservative corrispondono a forme differenziali esatte.*

Ricordiamo che

Teorema 3.13 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto connesso, ω forma differenziale continua in Ω. Sono equivalenti le seguenti proposizioni*

1. *ω è esatta*
2. *l'integrale di ω non dipende dal cammino: per ogni γ e ψ cammini in Ω con gli stessi estremi, risulta $\int_\gamma \omega = \int_\psi \omega$;*
3. *per ogni circuito γ in Ω: $\int_\gamma \omega = 0$.*

Vera una delle precedenti proposizioni, se u è una primitiva di ω risulta che per ogni $P, Q \in \Omega$ e γ cammino congiungente P a Q si ha $\int_\gamma \omega = u(Q) - u(P)$.

Osservazione 3.14 *Per stabilire che una forma differenziale non è esatta basta trovare un circuito su cui l'integrale non è nullo. Come condizione sufficiente è poco applicabile: si tratta di provare che l'integrale si annulla su* tutti *i circuiti. Questa condizione potrà semplificarsi in alcuni particolari casi.*

Esempio 3.15 *La forma differenziale* $\omega := \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ *non è esatta. Infatti* $\omega \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{2^*})$ *ed è semplice calcolare* $\int_{C_1^+} \omega = \{x = \cos t, y = \sin t\} = 2\pi$. *Pertanto* ω *non ammette potenziale.*

Fisicamente la forma differenziale rappresenta il campo magnetico indotto da un filo di corrente percorso da corrente perpendicolare al piano (x,y).

Definizione 3.16 *Diremo che* ω *è una* forma differenziale chiusa *se le sue componenti sono derivabili e se* $a_y = b_x$.

Proposizione 3.17 *Sia* ω *forma differenziale esatta di classe* $\mathscr{C}^1$. *Allora* ω *è chiusa.*

Osserviamo che la forma differenziale dell'esempio 3.15 è una forma differenziale chiusa (si faccia il conto) ma non è esatta.