Il teorema di Severini–Egoroff

Com'è noto dall'analisi elementare, la convergenza uniforme di una successione di funzioni implica la convergenza puntuale. In questa sezione presentiamo un teorema che si occupa, in un certo senso, dell'implicazione inversa.

Definiamo, preliminarmente, cosa vuol dire che una successione di funzioni misurabili a valori complessi f_n, definite su uno spazio di misura X con misura μ, converge *quasi uniformemente* verso una funzione $f : X \to \mathbb{C}$.

Definizione – *Diremo che f_n converge* quasi uniformemente *a f se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un insieme misurabile $E_\varepsilon \subset X$, con $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$, tale che $f_n \to f$ uniformemente in E_ε^c.*

Osserviamo innanzitutto che, se $f_n \to f$ quasi uniformemente, allora $f_n \to f$ quasi ovunque. Infatti, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste E_k tale che $\mu(E_k) < \frac{1}{k}$ e $f_n \to f$ uniformemente su E_k^c; pertanto, se $\bar{x} \in X$ è un punto in cui $f_n(\bar{x}) \not\to f(\bar{x})$, necessariamente $\bar{x} \in E_k \, \forall k$, ovvero $\bar{x} \in E = \bigcap_k E_k$, e la nostra asserzione segue dall'osservare che $\mu(E) = \lim_k \mu(E_k) = 0$.

Il teorema che segue afferma che, se $\mu(X) < \infty$, è anche vero il viceversa:

Teorema (Severini–Egoroff) – *Sia X uno spazio dotato di misura μ, e supponiamo che $\mu(X) < \infty$. Sia $f_n : X \to \mathbb{C}$ una successione di funzioni misurabili definite q.o. su X, tali che $f_n \to f$. Allora la successione f_n converge a f quasi uniformemente.*

Dim.

Fissiamo $\varepsilon > 0$, e sia A un insieme di misura nulla tale che $f_n \to f$ in $X - A$. Definiamo

$$S(n,k) = \{x : |f_i(x) - f_j(x)| < \frac{1}{k} \ \forall \, i, j \geq n\}$$

Fissato $k \in \mathbb{N}$, è evidente che $S(n,k) \subset S(n+1,k)$; inoltre, ogni x per cui $f_n(x) \to f(x)$ dovrà appartenere a $S(n,k)$ per n sufficientemente grande, e quindi

$$\bigcup_n S(n,k) = X - A\,.$$

Pertanto $\lim_n \mu(S(n,k)) = \mu(X)$; essendo $\mu(X) < \infty$ otteniamo che, per ogni fissato k, $\lim_n \mu(S^c(n,k)) = 0$, e quindi

$$\forall\, k \ \exists\, n_k : \mu(S^c(n_k,k)) < \frac{\varepsilon}{2^k}\,.$$

Poniamo allora $E_\varepsilon = \bigcup_k S^c(n_k,k)$; risulta $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$, e il teorema sarà dimostrato se mostreremo che $f_n \to f$ uniformemente in E_ε^c. Ma

$$E_\varepsilon^c = \bigcap_k S(n_k,k)\,;$$

quindi, tenendo conto della definizione degli insiemi $S(n,k)$, in E_ε^c risulta $|f_i(x) - f_j(x)| < \frac{1}{k}$ per ogni k, purché gli indici i, j siano sufficientemente grandi (cioè $j, j \geq n_k$). Ciò equivale a dire che $f_n \to f$ uniformemente in E_ε^c $\blacksquare$

Alcune proprietà dell'integrale di Lebesgue

La prima proposizione di questa sezione riguarda una proprietà dell'integrale di Lebesgue, nota come "assoluta continuità dell'integrale":

Proposizione 1 – *Sia* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio di misura, e* $f \in L^1(\mu)$. *Allora*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \int_A |f| \, d\mu < \varepsilon \quad \forall A \in \mathcal{M} \quad \text{tale che} \quad \mu(A) < \delta \, . \tag{1}$$

Dim.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo f_n come la troncata al livello n–simo di f; più precisamente, poniamo

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & |f(x)| \le n; \\ n \frac{f(x)}{|f(x)|} & |f(x)| > n. \end{cases}$$

La successione $|f - f_n|$ converge a zero q.o. in X, ed è dominata da $|f|$, cioè $|f - f_n| \le |f|$; per il teorema della convergenza dominata $\int_X |f - f_n| \, d\mu \to 0$, e quindi $\exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\int_X |f - f_{\overline{n}}| \, d\mu < \frac{1}{2}\varepsilon$; a maggior ragione, $\int_A |f - f_{\overline{n}}| \, d\mu < \frac{1}{2}\varepsilon$ per ogni insieme misurabile $A \subset X$.

Scegliamo ora $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\overline{n}}$, e sia A un qualsiasi insieme misurabile di X tale che $\mu(A) < \delta$. Si ha

$$\int_A |f| \, d\mu \le \int_A |f - f_{\overline{n}}| \, d\mu + \int_A |f_{\overline{n}}| \, d\mu < \frac{1}{2}\varepsilon + \mu(A)\overline{n} < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

In sostanza, la proposizione precedente asserisce che, se $f \in L^1$, l'integrale di $|f|$, ristretto a insiemi di misura opportunamente piccola, è piccolo. Qualcosa di simile accade anche "all'infinito", ovvero integrando la funzione su insiemi che siano complementari di insiemi opportunamente grandi, ma di misura finita:

Proposizione 2 – *Sia* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio di misura, e* $f \in L^1(\mu)$. *Allora*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathcal{M} \, : \, \mu(B) < \infty \quad \text{e} \quad \int_{B^c} |f| \, d\mu < \varepsilon \, . \tag{2}$$

Dim.

Definiamo

$$A_n = \{x : |f(x)| > \frac{1}{n}\}$$

e osserviamo che ciascun A_n è un insieme misurabile di misura finita, dato che

$$\int_X |f| \, d\mu \ge \int_{A_n} |f| \, d\mu \ge \frac{\mu(A_n)}{n} \, .$$

Poiché $\chi_{A_n}|f| \to |f|$, dal teorema della convergenza dominata segue che

$$\int_{A_n} |f|\, d\mu = \int_X \chi_{A_n}|f|\, d\mu \to \int_X |f|\, d\mu$$

e quindi

$$\int_{A_n^c} |f|\, d\mu \to 0\,.$$

Pertanto, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\overline{n}$ tale che

$$\int_{A_{\overline{n}}^c} |f|\, d\mu < \varepsilon\,;$$

e la tesi della proposizione si ottiene scegliendo $B = A_{\overline{n}}$ ■

La prossima definizione riguarda una famiglia di funzioni f_α che verificano (1) e (2) uniformemente rispetto a α:

Definizione 1 – *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Una famiglia di funzioni integrabili $f_\alpha : X \to \mathbb{C}$ si dice* equiintegrabile *se verifica le due condizioni seguenti:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \int_A |f_\alpha|\, d\mu < \varepsilon \quad \forall\, A \in \mathcal{M} \quad \text{tale che} \quad \mu(A) < \delta \quad \text{e} \quad \forall\, \alpha\,;$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B : \mu(B) < \infty \text{ e } \int_{B^c} |f_\alpha|\, d\mu < \varepsilon \quad \forall\, \alpha\,.$$

Osservazione Se esiste una funzione $g(x) \in L^1(\mu)$ tale che $|f_\alpha(x)| \le g(x)$ per ogni α, allora certamente la famiglia f_α è equiintegrabile, mentre non è vero, in generale, il viceversa.

Possiamo ora enunciare il seguente

Teorema (Vitali) – *Sia (X, μ) uno spazio di misura, e sia $f_n(x)$ una successione di funzioni equiintegrabili su X. Supponiamo che $f_n(x) \to f(x)$ quasi ovunque in X. Allora*

$$\int_X |f_n - f|\, d\mu \to 0\,.$$

Dim.

Fissiamo $\varepsilon > 0$, e sia $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\int_A |f_n|\, d\mu < \varepsilon \quad \forall\, A : \mu(A) < \delta, \quad \forall\, n\,. \tag{3}$$

Esiste un insieme B di misura finita tale che

$$\int_{B^c} |f_n| \, d\mu < \varepsilon \quad \forall n$$

e quindi, per il lemma di Fatou,

$$\int_{B^c} |f| \, d\mu \leq \varepsilon \, .$$

Essendo B di misura finita, vale in B il teorema di Severini–Egoroff. Pertanto, esiste $C \subset B$ tale che $\mu(B \setminus C) < \delta$ e $f_n \to f$ uniformemente in C. Dalla (3) risulta

$$\int_{B \setminus C} |f_n| \, d\mu < \varepsilon \quad \forall \, n$$

e dal lemma di Fatou si ottiene

$$\int_{B \setminus C} |f| \, d\mu \leq \varepsilon \, .$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_X |f_n - f| \, d\mu = & \int_C |f_n - f| \, d\mu + \int_{B \setminus C} |f_n - f| \, d\mu + \int_{B^c} |f_n - f| \, d\mu \leq \\
& \int_C |f_n - f| \, d\mu + \int_{B \setminus C} |f_n| \, d\mu + \int_{B \setminus C} |f| \, d\mu + \int_{B^c} |f_n| \, d\mu + \int_{B^c} |f| \, d\mu \leq \\
& \int_C |f_n - f| \, d\mu + 4\varepsilon \, .
\end{aligned}$$

Essendo $\mu(C) < \infty$, e dato che $f_n \to f$ uniformemente in C, l'integrale $\int_C |f_n - f| \, d\mu$ tende a zero quando $n \to \infty$, da cui la tesi $\blacksquare$

L'osservazione subito dopo la definizione 1 implica che il teorema di Vitali costituisce una generalizzazione del teorema della convergenza dominata.