Definizione 3.29 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *aperto. Siano* $\gamma, \psi : [0,1] \to \Omega$ *cammini con gli stessi estremi. Diremo che* γ *e* ψ *sono* cammini omotopi *in* Ω *(o anche* Ω*-omotopi) se esite* $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ *continua tale che per ogni* $\lambda \in [0,1]$*:* $H(\cdot,\lambda) : [0,1] \to \Omega$ *è un cammino con primo estremo* $\gamma(0) = \psi(0)$ *e secondo estremo* $\gamma(1) = \psi(1)$*,* $H(\cdot,0) = \gamma$ *ed* $H(\cdot,1) = \psi$*.*

Teorema 3.30 *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *aperto ed* $f \in H(\Omega)$*. Siano* $\gamma, \psi : [0,1] \to \Omega$ *cammini con gli stessi estremi e* Ω*-omotopi, allora* $\int_\gamma f(x)dz = \int_\psi f(x)dz$*.*

Dim. Sia $H : [0,1]^2 \to \Omega$ l'applicazione di omnotopia prevista dalla definizione. Osserviamo che l'immagine di $[0,1]^2$ attraverso H è compatta e connessa.

Sia $\epsilon > 0$ tale che $D_\epsilon(z) \subset \Omega$ per ogni $z \in H([0,1]^2)$. Per la uniforme continuità di H in $[0,1]^2$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ e $t, s \in [0,1]$ con $|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$ e $|s-t| < \delta$ risulta $|H(\lambda_1,t) - H(\lambda_2,s)| < \epsilon$. In particolare per $|\lambda_1 - \lambda_2| < \delta$

$$|H(\lambda_1,t) - H(\lambda_2,t)| < \epsilon \text{ per ogni } t \in [0,1]. \tag{3.2}$$

Se proviamo che gli integrali lungo le curve individuate da λ_1 e λ_2 sono uguali allora la tesi segue con un numero finito di passi.

Osserviamo che l'immagine di $[\lambda_1,\lambda_2] \times [0,1]$ atraverso H è connesso e compatto. Da (3.2) e dalla compattezza di $[0,1]$ si ha che possiamo ricoprire entrami i supporti delle curve con $n+1$ dischi di raggio ϵ $D_1 ... D_{n+1}$. Siano $P_0 = H(\lambda_1, 0)$, $P_{n+1} = H(\lambda_1, 1)$ e scegliamo P_1,

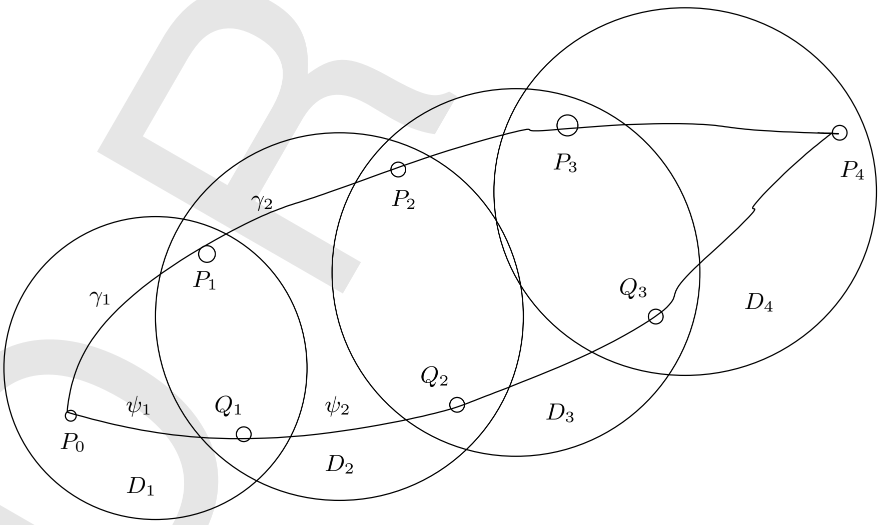

Figure 3.1: Curve omotope

P_2 ...P_n n punti che appartengono al supporto di $H(\lambda_1,\cdot)$ ed ai dischi: $P_j \in D_j \cap D_{j+1}$ ed analogamente scegliamo Q_1, Q_2 ...Q_n. Essendo D_j convesso, f avrà primitiva $F_j : D_j \to \mathbb{R}$ pertanto chiamando γ_j il tratto di curva di $H(\lambda_1, \cdot)$ che congiunge P_j a P_{j+1} e con ψ_j il tratto di curva di $H(\lambda_2, \cdot)$ che congiunge Q_j a Q_{j+1} si ha che

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_1} \omega - \int_{\lambda_2} \omega = \int_{\gamma_0} \omega + \int_{\gamma_1} \omega + \ldots + \int_{\gamma_n} \omega - \int_{\psi_0} \omega - \int_{\psi_1} \omega + \ldots - \int_{\psi_n} \omega \\
= F_1(P_1) - F_1(P_0) + F_2(P_2) - F_2(P_1) + \ldots + F_{n+1}(P_{n+1}) - F_{n+1}(P_n) + \\
-F_1(Q_1) + F_1(P_0) - F_2(Q_2) + F_2(Q_1) + \ldots - F_{n+1}(P_{n+1}) + F_{n+1}(Q_n) = \\
= F_1(P_1) - F_2(P_1) + F_2(P_2) - F_3(P_2) + \ldots F_n(P_n) - F_{n+1}(P_n) + \\
-(F_1(Q_1) - F_2(Q_1)) - (F_2(Q_2) - F_3(Q_2)) + \ldots - (F_n(Q_n) - F_{n+1}(Q_n)) \\
= c_1 + c_2 + \ldots + c_n - c_1 - c_2 + \ldots - c_n = 0
\end{aligned}$$

dove si è utilizzato il fatto che F_1 ed F_2 sono primitive della stessa forma differenziale sull'aperto connesso $D_1 \cap D_2$ e pertanto su tale insieme differiscono per una costante c_1. Analogamente per tutt le altre F_j. □