Esercizi di Matematica Finanziaria

Esercizi preliminari, parte 2

Claudio Pacati
Università degli Studi di Siena
CLAUDIO.PACATI@UNISI.IT

Roberto Renò
Università degli Studi di Verona
ROBERTO.RENO@UNIVR.IT

Versione del 25 novembre 2016

Temi trattati in questa raccolta di esercizi:

- **Assenza di arbitraggi non rischiosi**
- **Struttura per scadenza dei tassi di interesse**
- **Tassi a pronti e a termine**
- **Duration e convexity**
- **Rischio di tasso di interesse**

Esercizio 1

Siano $W(0, x_1) = 95.6$ lire, $W(0, x_2) = 132.8$ lire e $W(0, x_3) = 201.7$ lire i prezzi di mercato al tempo 0 di tre *zero coupon bond* con valori di rimborso $x_1 = 100$ lire, $x_2 = 150$ lire e $x_3 = 250$ lire, esigibili ai tempi $t_1 = 90$ giorni, $t_2 = 180$ giorni e $t_3 = 360$ giorni.
Calcolare la struttura per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine implicata dalla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua ed assumendo la durata commerciale dell'anno (360 giorni).

$$i(0, t_1) = \texttt{19.7205} \qquad i(0, 0, t_1) = \texttt{19.7205}$$
$$i(0, t_2) = \texttt{27.5811} \qquad i(0, t_1, t_2) = \texttt{35.9579}$$
$$i(0, t_3) = \texttt{23.9465} \qquad i(0, t_2, t_3) = \texttt{20.4154}$$

Esercizio 2

Sia dato il titolo $\boldsymbol{x}_1$ che paga un flusso di importi $\{12, 12, 12, 112\}$ ai tempi $\boldsymbol{t} = \{0.5, 1, 1.5, 2\}$. Con riferimento ad una struttura dei tassi a pronti data da $i(0, 0.5) = 10.75\%$, $i(0, 1) = 10.90\%$, $i(0, 1.5) = 11.05\%$, $i(0, 2) = 11.25\%$, determinare la duration del titolo $\boldsymbol{x}_1$. Indicato poi con $\boldsymbol{x}$ il portafoglio composto da una quota $\alpha_1 = 1$ del titolo $\boldsymbol{x}_1$ e da una quota α_2 di uno *zero coupon bond* $\boldsymbol{x}_2$ che paga 100 lire in $t = 0.5$, determinare α_2 in modo che $D(0, \boldsymbol{x}) = 1$.

$$D(0, \boldsymbol{x}_1) = \texttt{1.73122}$$
$$\alpha_2 = \texttt{1.89258}$$

Esercizio 3

Siano $W(0, x_1) = 97.2$ lire, $W(0, x_2) = 181.8$ lire e $W(0, x_3) = 309.5$ lire i prezzi di mercato al tempo 0 di tre *zero coupon bond* con valori di rimborso $x_1 = 100$ lire, $x_2 = 200$ lire e $x_3 = 350$ lire, esigibili ai tempi $t_1 = 90$ giorni, $t_2 = 270$ giorni e $t_3 = 360$ giorni.
Calcolare la struttura per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine implicata dalla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua ed assumendo la durata commerciale dell'anno (360 giorni).

$$i(0, t_1) = \texttt{12.0302} \qquad i(0, 0, t_1) = \texttt{12.0302}$$
$$i(0, t_2) = \texttt{13.566} \qquad i(0, t_1, t_2) = \texttt{14.3417}$$
$$i(0, t_3) = \texttt{13.0856} \qquad i(0, t_2, t_3) = \texttt{11.6568}$$

Esercizio 4

Sia dato il titolo $\boldsymbol{x}_1$ che paga un flusso di importi $\{11, 11, 11, 111\}$ ai tempi $\boldsymbol{t} = \{0.5, 1, 1.5, 2\}$. Con riferimento ad una struttura dei tassi a pronti data da $i(0, 0.5) = 11.25\%$, $i(0, 1) = 11.50\%$, $i(0, 1.5) = 12.05\%$, $i(0, 2) = 12.70\%$, determinare la duration del titolo $\boldsymbol{x}_1$. Indicato poi con $\boldsymbol{x}$ il portafoglio composto da una quota α_1 del titolo $\boldsymbol{x}_1$ e da una quota $\alpha_2 = 3$ di uno *zero coupon bond* $\boldsymbol{x}_2$ che paga 100 lire in $t = 0.5$, determinare α_1 in modo che $D(0, \boldsymbol{x}) = 1$.

$$D(0, \boldsymbol{x}_1) = \texttt{1.742256} \qquad\qquad \alpha_1 = \texttt{1.638118}$$

Esercizio 5

Si consideri una rendita perpetua posticipata $\boldsymbol{x}$, con rata costante R, il cui valore attuale, calcolato ad un tasso annuo costante i, sia di100 lire. Determinare il valore della rata R in modo che la *duration,* calcolata al tasso i, risulti $D(0, \boldsymbol{x}) = 9$ anni.

$$R = \texttt{12.5}$$

Esercizio 6

Siano $W(0, x_1) = 98.2$ lire, $W(0, x_2) = 183.8$ lire e $W(0, x_3) = 307.5$ lire i prezzi di mercato al tempo 0 di tre *zero coupon bond* con valori di rimborso $x_1 = 100$ lire, $x_2 = 200$ lire e $x_3 = 350$ lire, esigibili ai tempi $t_1 = 60$ giorni, $t_2 = 240$ giorni e $t_3 = 360$ giorni.

(a) Calcolare la struttura per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine implicata dalla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua ed assumendo la durata commerciale dell'anno (360 giorni).

$$i(0, t_1) = \texttt{11.5144}\ \% \qquad i(0, 0, t_1) = \texttt{11.5144}\ \%$$

$$i(0, t_2) = \texttt{13.5081}\ \% \qquad i(0, t_1, t_2) = \texttt{14.1805}\ \%$$

$$i(0, t_3) = \texttt{13.8211}\ \% \qquad i(0, t_2, t_3) = \texttt{14.4499}\ \%$$

(b) Si determini il valore attuale rispetto alla struttura calcolata del flusso $\boldsymbol{x} = \{100, 200, 350\}/\{t_1, t_2, t_3\}$.

$$W(0, \boldsymbol{x}) = \texttt{589.5}$$

Esercizio 7

Sia dato un bullet bond di $\boldsymbol{x}_1$ con valore facciale 100 lire, *maturity* 2 anni, cedole pagabili semestralmente al tasso nominale annuo $i = 12\%$. Con riferimento ad una struttura dei tassi a pronti su base annua data da $i(0, 0.5) = 10.25\%$, $i(0, 1) = 10.50\%$, $i(0, 1.5) = 11.05\%$, $i(0, 2) = 11.70\%$, determinare la duration del titolo $\boldsymbol{x}_1$. Indicato poi con $\boldsymbol{x}$ il portafoglio composto da una quota $\alpha_1 = 2$ del titolo $\boldsymbol{x}_1$ e da una quota α_2 di uno *zero coupon bond* $\boldsymbol{x}_2$ che paga 100 lire in $t = 1$, determinare α_2 in modo che $D(0, \boldsymbol{x}) = 1.2$.

$$D(0, \boldsymbol{x}_1) = \texttt{1.836362}\ \textit{anni}$$

$$\alpha_2 = \texttt{7.118169}$$

Esercizio 8

Sia dato un *bullet bond* $\boldsymbol{x}$ di valore nominale 100 lire, *maturity* 7 anni, cedola annuale e quotato alla pari. Calcolare il valore attuale e la *duration* del titolo rispetto alla struttura piatta dei tassi di interesse determinata dal T.I.R. di $\boldsymbol{x}$, sapendo che questo è uguale a 12.73%.

$$W(0, \boldsymbol{x}) = \texttt{100} \qquad D(0, \boldsymbol{x}) = \texttt{5.02779}$$

Esercizio 9

Siano $W(0, x_1) = 99.2$ lire, $W(0, x_2) = 187.8$ lire e $W(0, x_3) = 317.5$ lire i prezzi di mercato al tempo 0 di tre *zero coupon bond* con valori di rimborso $x_1 = 100$ lire, $x_2 = 200$ lire e $x_3 = 350$ lire, esigibili ai tempi $t_1 = 30$ giorni, $t_2 = 210$ giorni e $t_3 = 360$ giorni. Calcolare la struttura per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine implicata dalla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua ed assumendo la durata commerciale dell'anno (360 giorni).

$$i(0, t_1) = \texttt{10.1184}\ \% \qquad i(0, 0, t_1) = \texttt{10.1184}\ \%$$

$$i(0, t_2) = \texttt{11.3933}\ \% \qquad i(0, t_1, t_2) = \texttt{11.6072}\ \%$$

$$i(0, t_3) = \texttt{10.2362}\ \% \qquad i(0, t_2, t_3) = \texttt{8.6365}\ \%$$

Esercizio 10

Sia data una operazione finanziaria $\boldsymbol{x}_1/\boldsymbol{t}$ con $\boldsymbol{x}_1 = \{5, 10, 5, 215\}$ e $\boldsymbol{t} = \{0.5, 1, 1.5, 2\}$, essendo il tempo misurato in anni. Calcolarne la *duration* rispetto ad una struttura dei tassi a pronti su base annua data da $i(0, 0.5) = 10.35\%$, $i(0, 1) = 10.40\%$, $i(0, 1.5) = 10.65\%$, $i(0, 2) = 11.00\%$. Indicato poi con $\boldsymbol{x}$ il portafoglio costituito da una quota $\alpha_1 = 1$ del titolo $\boldsymbol{x}_1$ e da una quota α_2 di uno z.c.b. che paga 100 lire in $t = 1$, determinare α_2 in modo che $D(0, \boldsymbol{x}) = 1.5$.

$$D(0, \boldsymbol{x}_1) = 1.904754 \text{ anni} \qquad \alpha_2 = 1.721372$$

Esercizio 11

Sia dato un *bullet bond* $\boldsymbol{x}$ di valore facciale 120 lire, *maturity* 10 anni, cedola annuale di 12.5 lire e quotato alla pari. Calcolarne il T.I.R. e la *duration* relativamente ad una struttura dei tassi di interesse piatta al livello del T.I.R. .

$$\text{T.I.R.} = 10.4167 \qquad D(0, \boldsymbol{x}) = 6.66487$$

Esercizio 12

Siano $W(0, x_1) = 97$ lire, $W(0, x_2) = 192$ lire e $W(0, x_3) = 317$ lire i prezzi di mercato al tempo 0 di tre *zero coupon bond* con valori di rimborso $x_1 = 100$ lire, $x_2 = 200$ lire e $x_3 = 350$ lire, esigibili ai tempi $t_1 = 90$ giorni, $t_2 = 120$ giorni e $t_3 = 360$ giorni. Calcolare la struttura per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine implicata dalla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua ed assumendo la durata commerciale dell'anno (360 giorni).

$$\begin{aligned} i(0, t_1) &= 12.9570\ \% & \qquad i(0, 0, t_1) &= 12.9570\ \% \\ i(0, t_2) &= 13.0281\ \% & \qquad i(0, t_1, t_2) &= 13.2416\ \% \\ i(0, t_3) &= 10.4101\ \% & \qquad i(0, t_2, t_3) &= 9.1239\ \% \end{aligned}$$

Esercizio 13

Sia data una operazione finanziaria $\boldsymbol{x}_1/\boldsymbol{t}$ con $\boldsymbol{x}_1 = \{12.5, 10, 12.5, 235\}$ e $\boldsymbol{t} = \{0.5, 1, 1.5, 2\}$, ove il tempo è misurato in anni. Calcolarne la *duration* rispetto ad una struttura dei tassi a pronti su base annua data da $i(0, 0.5) = 11.10\%$, $i(0, 1) = 11.30\%$, $i(0, 1.5) = 11.50\%$, $i(0, 2) = 11.70\%$. Indicato poi con $\boldsymbol{x}$ il portafoglio costituito da una quota $\alpha_1 = 1$ del titolo $\boldsymbol{x}_1$ e da una quota α_2 di uno z.c.b. che paga 100 lire in $t = 0.5$, determinare α_2 in modo che $D(0, \boldsymbol{x}) = 1$.

$$\begin{aligned} D(0, \boldsymbol{x}_1) &= 1.854047 \ \textit{anni} \\ \alpha_2 &= 3.957437 \end{aligned}$$

Esercizio 14

Data una rendita posticipata decennale $\boldsymbol{x}$ con rate semestrali di 100 lire, calcolarne la *duration* in $t = 0$ anni in riferimento ad una struttura dei tassi di interesse piatta caratterizzata da una intensità istantanea di interesse $\delta = 0.09$ anni^{-1}.

Determinare inoltre, supponendo che il mercato si evolva in condizioni di certezza, valore e *duration* della rendita in $t' = 0.25$.

$$\begin{aligned} D(t, \boldsymbol{x}) &= 4.51181 \\ W(t', \boldsymbol{x}) &= 1318.62 \\ D(t', \boldsymbol{x}) &= 4.26181 \end{aligned}$$

Esercizio 15

Supponendo che la funzione intensità istantanea di interesse in vigore sul mercato al tempo $t = 0$ abbia la forma:

$$\delta(0, s) = \alpha + \beta s + \gamma s^2 \qquad \text{con } s \geq 0$$

e ponendo $\alpha = 0.1$, $\beta = -0.005$ e $\gamma = 0.001$, per $k = 1, 2, 3$ calcolare ed esprimere in forma percentuale:
a) i tassi a pronti $i(0, k)$;
b) i tassi a termine $i(0, k - 1, k)$.

$$\begin{aligned} i(0, 1) &= 10.2779\ \% & \qquad i(0, 0, 1) &= 10.2779\ \% \\ i(0, 2) &= 10.1126\ \% & \qquad i(0, 1, 2) &= 9.94756\ \% \\ i(0, 3) &= 10.0209\ \% & \qquad i(0, 2, 3) &= 9.83767\ \% \end{aligned}$$

Esercizio 16

Sia dato un flusso di pagamenti $\boldsymbol{z} = \{100, 100, 100, 100\}/\{1, 2, 3, 4\}$, ove il tempo è misurato in anni. Consideriamo un dato mercato dei capitali e supponiamo che la struttura dei tassi di mercato sia, relativamente ai primi quattro anni, $i(0, 1) = 11.1\%$, $i(0, 2) = 11.3\%$, $i(0, 3) = 11.5\%$, $i(0, 4) = 11.7\%$. Calcolare il valore attuale e la *duration* del flusso $\boldsymbol{z}$ rispetto alla struttura di mercato.
Supponiamo inoltre che sul mercato siano disponibili due titoli $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ con valore attuale e *duration*, calcolati rispetto alla struttura data, rispettivamente $W(0, \boldsymbol{x}) = 98$ lire, $D(0, \boldsymbol{x}) = 1$ anno e $W(0, \boldsymbol{y}) = 102$ lire, $D(0, \boldsymbol{y}) = 3$ anni. Costruire un portafoglio $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ con stesso valore attuale e stessa *duration* del flusso $\boldsymbol{z}$.

$$W(0, \boldsymbol{z}) = \texttt{307.111} \qquad \alpha = \texttt{1.00258}$$
$$D(0, \boldsymbol{z}) = \texttt{2.36015} \qquad \beta = \texttt{2.04763}$$

Esercizio 17

Sia data una operazione finanziaria $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$ con:

$$\boldsymbol{x} = \{\, 6.5\,,\ 17.5\,,\ 6.5\,,\ 217.5\,\}\,, \qquad \boldsymbol{t} = \{\, 0.5\,,\ 1\,,\ 1.5\,,\ 2\,\}\,,$$

ove il tempo è misurato in anni. Calcolarne la *duration* rispetto ad una struttura dei tassi a pronti su base annua data da $i(0, 0.5) = 9.45\%$, $i(0, 1) = 9.30\%$, $i(0, 1.5) = 9.50\%$, $i(0, 2) = 9.45\%$.
Si supponga inoltre che sul mercato sia disponibile un titolo $\boldsymbol{y}$ di valore attuale $W(0, \boldsymbol{y}) = 100$ e *duration* $D(0, \boldsymbol{y}) = 0.5$, calcolati entrambi rispetto alla struttura dei tassi assegnata. Indicato con $\boldsymbol{z}$ il portafoglio costituito da una quota $\alpha_x = 1$ del titolo $\boldsymbol{x}$ e da una quota α_y del titolo $\boldsymbol{y}$, determinare α_y in modo che $D(0, \boldsymbol{z}) = 1$.

$$D(0, \boldsymbol{x}) = \texttt{1.865526}\ \text{anni} \qquad \alpha_y = \texttt{3.625860}$$

Esercizio 18

Siano $W(0, x_1) = 99$ lire, $W(0, x_2) = 190$ lire e $W(0, x_3) = 270$ lire i prezzi di mercato al tempo 0 di tre *zero coupon bond* con valori di rimborso $x_1 = 100$ lire, $x_2 = 200$ lire e $x_3 = 300$ lire, esigibili ai tempi $t_1 = 30$ giorni, $t_2 = 180$ giorni e $t_3 = 360$ giorni.

(a) Calcolare la struttura per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine implicata dalla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua ed assumendo la durata commerciale dell'anno (360 giorni).

$$i(0, t_1) = \texttt{12.8178}\ \% \qquad i(0, 0, t_1) = \texttt{12.8178}\ \%$$
$$i(0, t_2) = \texttt{10.8033}\ \% \qquad i(0, t_1, t_2) = \texttt{10.4048}\ \%$$
$$i(0, t_3) = \texttt{11.1111}\ \% \qquad i(0, t_2, t_3) = \texttt{11.4198}\ \%$$

(b) Considerato il flusso $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$, degli importi di cui sopra, esigibili ai tempi $\{t_1, t_2, t_3\}$ assegnati, sia $P = 558$ il valore di mercato del flusso $\boldsymbol{x}$. Dire con quale delle seguenti strategie è possibile realizzare un profitto certo al tempo $t = 0$, avendo chiuso in pareggio la posizione negli altri periodi, ed indicare l'eventuale guadagno G:

× vendere allo scoperto i tre *zcb* ed acquistare il flusso $\boldsymbol{x}$;
vendere allo scoperto i primi due *zcb* ed acquistare il terzo *zcb* ed il flusso $\boldsymbol{x}$;
vendere allo scoperto il primo ed il terzo *zcb* ed acquistare il secondo *zcb* ed il flusso $\boldsymbol{x}$;
vendere allo scoperto il flusso $\boldsymbol{x}$ ed acquistare i tre *zcb;*
nessuna di quelle precedentemente indicate;
non esiste alcuna strategia.

$$G = \texttt{1}$$

Esercizio 19

Sia data una operazione finanziaria $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$ con:

$$\boldsymbol{x} = \{\, 10\,,\ 18.5\,,\ 10\,,\ 218.5\,\}\,, \qquad \boldsymbol{t} = \{\, 0.5\,,\ 1\,,\ 1.5\,,\ 2\,\}\,,$$

ove il tempo è misurato in anni. Calcolarne la *duration* rispetto ad una struttura dei tassi a pronti su base annua data da $i(0, 0.5) = 9.80\%$, $i(0, 1) = 9.85\%$, $i(0, 1.5) = 9.90\%$, $i(0, 2) = 9.95\%$.
Si supponga inoltre che sul mercato siano disponibili due titoli $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$, di valori attuali $W(0, \boldsymbol{y}) = 100$ e $W(0, \boldsymbol{z}) = 80$, mentre le *duration* siano $D(0, \boldsymbol{y}) = 0.5$ e $D(0, \boldsymbol{z}) = 1.5$ (tutti calcolati rispetto alla struttura dei tassi assegnata). Indicato con $\boldsymbol{u}$ il portafoglio costituito da una quota α_y del titolo $\boldsymbol{y}$ e da una quota α_z del titolo $\boldsymbol{z}$, determinare α_y e α_z in modo che risulti $W(0, \boldsymbol{u}) = W(0, \boldsymbol{x})$ e $D(0, \boldsymbol{u}) = 1.2$.

$$D(0, \boldsymbol{x}) = \texttt{1.835520}\ \text{anni} \qquad \alpha_y = \texttt{0.647421} \qquad \alpha_z = \texttt{1.888311}$$

Esercizio 20

Sia dato un *bullet bond* $\boldsymbol{x}$ di valore nominale 100 lire, vita a scadenza $m = 2$ anni, cedola annuale dell'8% nominale e prezzo $P = 98$ lire. Calcolarne il T.I.R. i^* e la *duration* $D(0, \boldsymbol{x})$ secondo la struttura dei tassi di interesse piatta al livello del T.I.R.; determinare inoltre la quantità ΔP di cui bisogna decrementare il prezzo affinché il T.I.R. risulti uguale al 10%.

$$i^* = \mathtt{9.139}\ \% \qquad D(0, \boldsymbol{x}) = \mathtt{1.925} \text{ anni} \qquad \Delta P = \mathtt{1.47107} \text{ lire}$$

Esercizio 21

Supponendo che la funzione intensità istantanea di interesse in vigore sul mercato al tempo $t = 0$ abbia la forma:

$$\delta(0, s) = \alpha + \beta s^2 \qquad \text{con } s \geq 0$$

e ponendo $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.0045$, per $k = 1, 2, 3$ calcolare ed esprimere in forma percentuale:
a) i tassi a pronti $i(0, k)$;
b) i tassi a termine $i(0, k-1, k)$.

$$\begin{aligned} i(0,1) &= \mathtt{10.6830}\ \% \qquad & i(0,0,1) &= \mathtt{10.6830}\ \% \\ i(0,2) &= \mathtt{11.1822}\ \% \qquad & i(0,1,2) &= \mathtt{11.6836}\ \% \\ i(0,3) &= \mathtt{12.0192}\ \% \qquad & i(0,2,3) &= \mathtt{13.7121}\ \% \end{aligned}$$

Esercizio 22

Si consideri un mercato dei capitali in cui siano presenti tre titoli obbligazionari $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$, i cui valori attuali e *duration*, calcolati rispetto alla struttura dei tassi in vigore sul mercato, siano:

$$\begin{array}{llll} W(0, \boldsymbol{x}) = 100 & \textit{lire}, & D(0, \boldsymbol{x}) = 1 & \textit{anni}, \\ W(0, \boldsymbol{y}) = 90 & \textit{lire}, & D(0, \boldsymbol{y}) = 2 & \textit{anni}, \\ W(0, \boldsymbol{z}) = 95 & \textit{lire}, & D(0, \boldsymbol{z}) = 1.5 & \textit{anni}. \end{array}$$

Si supponga di detenere un portafoglio costituito da $\alpha_y = 2$ quote del titolo $\boldsymbol{y}$. Determinare quante quote α_x del titolo $\boldsymbol{x}$ e quante quote α_z del titolo $\boldsymbol{z}$ bisogna aggiungergli, affinché il portafoglio risultante abbia che abbia valore attuale 500 lire e *duration* 1.5 anni.

$$\alpha_x = \mathtt{1.8}$$

$$\alpha_z = \mathtt{1.473684}$$

Esercizio 23

Siano $W(0, x_1) = 98.5$ lire, $W(0, x_2) = 191.8$ lire e $W(0, x_3) = 272.5$ lire i prezzi di mercato al tempo 0 di tre *zero coupon bond* con valori di rimborso $x_1 = 100$ lire, $x_2 = 200$ lire e $x_3 = 300$ lire, esigibili ai tempi $t_1 = 60$ giorni, $t_2 = 180$ giorni e $t_3 = 360$ giorni.

(a) Calcolare la struttura per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine implicata dalla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua ed assumendo la durata commerciale dell'anno (360 giorni).

$$\begin{aligned} i(0, t_1) &= \mathtt{9.49206}\ \% \qquad & i(0, 0, t_1) &= \mathtt{9.49206}\ \% \\ i(0, t_2) &= \mathtt{8.73335}\ \% \qquad & i(0, t_1, t_2) &= \mathtt{8.35598}\ \% \\ i(0, t_3) &= \mathtt{10.0917}\ \% \qquad & i(0, t_2, t_3) &= \mathtt{11.4671}\ \% \end{aligned}$$

(b) Si determini il valore attuale rispetto alla struttura calcolata del flusso $\boldsymbol{x} = \{100, 200, 300\}/\{t_1, t_2, t_3\}$.

$$W(0, \boldsymbol{x}) = \mathtt{562.8}$$

Esercizio 24

Siano $W(0, x_1) = 97.5$ lire, $W(0, x_2) = 125.2$ lire e $W(0, x_3) = 141.9$ lire i prezzi di mercato al tempo $t_0 = 0$ di tre *zero coupon bond* con valori di rimborso $x_1 = 100$ lire, $x_2 = 135$ lire e $x_3 = 170$ lire, esigibili ai tempi $t_1 = 90$ giorni, $t_2 = 180$ giorni e $t_3 = 360$ giorni. Si calcoli la struttura per scadenza dei rendimenti a scadenza (*yield to maturity*) e quella dei rendimenti a scadenza impliciti determinate dalla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i rendimenti a scadenza su base annua ed assumendo la durata commerciale dell'anno (360 giorni).

$$\begin{aligned} h(t_0, t_1) &= \mathtt{0.101271} \qquad & h(0, t_0, t_1) &= \mathtt{0.101271} \\ h(t_0, t_2) &= \mathtt{0.150725} \qquad & h(0, t_1, t_2) &= \mathtt{0.200178} \\ h(t_0, t_3) &= \mathtt{0.180676} \qquad & h(0, t_2, t_3) &= \mathtt{0.210627} \end{aligned}$$

Esercizio 25

Consideriamo un mercato in cui siano presenti i seguenti titoli:

- uno *zcb* $\boldsymbol{x} = \{\,100\,,\,0\,,\,0\,\}/\boldsymbol{t}$;
- un *bullet bond* $\boldsymbol{y} = \{\,11.5\,,\,0\,,\,111.5\,\}/\boldsymbol{t}$;
- un *bullet bond* $\boldsymbol{z} = \{\,6\,,\,6\,,\,106\,\}/\boldsymbol{t}$;

essendo $\boldsymbol{t} = \{\,0.5\,,\,1\,,\,1.5\,\}$ anni. Supponiamo che i prezzi di mercato al tempo 0 siano $W(0,\boldsymbol{x}) = 97$ lire, $W(0,\boldsymbol{y}) = 109.9$ lire e $W(0,\boldsymbol{z}) = 105.3$ lire.

(a) Calcolare la struttura per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine implicata dalla struttura dei prezzi degli *zcb* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua.

$$i(0,t_1) = 6.281\ \% \qquad i(0,0,t_1) = 6.281\ \%$$
$$i(0,t_2) = 7.031\ \% \qquad i(0,t_1,t_2) = 7.787\ \%$$
$$i(0,t_3) = 8.436\ \% \qquad i(0,t_2,t_3) = 11.30\ \%$$

(b) Mostrare che gli *zcb* $\boldsymbol{v} = \{\,0\,,\,100\,,\,0\,\}/\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{w} = \{\,0\,,\,0\,,\,100\,\}/\boldsymbol{t}$ sono replicabili con portafogli

$$\boldsymbol{v} = \alpha_x\boldsymbol{x} + \alpha_y\boldsymbol{y} + \alpha_z\boldsymbol{z}\ , \qquad \boldsymbol{w} = \beta_x\boldsymbol{x} + \beta_y\boldsymbol{y} + \beta_z\boldsymbol{z}\ ,$$

determinandone le composizioni.

$$\alpha_x = 0.822123 \qquad \alpha_y = -15.8445 \qquad \alpha_z = 16.66667$$
$$\beta_x = -0.10314 \qquad \beta_y = 0.896861 \qquad \beta_z = 0$$

Esercizio 26

Sia dato un mercato con tre titoli obbligazionari: due *zero coupon bond* $\boldsymbol{x} = \{100, 0, 0\}/\{t_1, t_2, t_3\}$ e $\boldsymbol{y} = \{0, 200, 0\}/\{t_1, t_2, t_3\}$ ed un contratto a termine $\boldsymbol{z}$ che garantisce 300 lire in t_3. Siano $W(0,\boldsymbol{x}) = 98.5$ lire e $W(0,\boldsymbol{z}) = 193$ i prezzi di mercato al tempo $t_0 = 0$ dei due *zcb* e sia invece $W(0,t_2,t_3;\boldsymbol{y}) = 290$ lire il prezzo, pattuito in t_0 e pagabile in t_2, del contratto a termine $\boldsymbol{z}$. Siano infine $t_1 = 90$ giorni, $t_2 = 180$ giorni e $t_3 = 360$ giorni. Si calcolino le strutture per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine implicate dalla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua ed assumendo la durata commerciale dell'anno (360 giorni).

$$i(t_0,t_1) = 6.2319 \qquad i(0,t_0,t_1) = 6.2319$$
$$i(t_0,t_2) = 7.3854 \qquad i(0,t_1,t_2) = 8.5515$$
$$i(t_0,t_3) = 7.2003 \qquad i(0,t_2,t_3) = 7.0155$$

Esercizio 27

Si consideri un mercato in cui sono presenti al tempo $t_0 = 0$ i seguenti titoli:

un titolo $\boldsymbol{x} = \{7, 2.5, 3, 87\}/\boldsymbol{t}$ al prezzo $p_x = 90$ lire,
un titolo $\boldsymbol{y} = \{0, 4.5, 4, 32\}/\boldsymbol{t}$ al prezzo $p_y = 22$ lire,

ove $\boldsymbol{t} = \{1, 2, 3, 4\}$ anni.
Si determini il tasso interno di rendimento i del portafoglio $\boldsymbol{z}$ composto da una quota del titolo $\boldsymbol{x}$ e da una quota del titolo $\boldsymbol{y}$. Si determini inoltre il valore attuale e la *duration* del portafoglio $\boldsymbol{z}$, assumendo una struttura dei tassi piatta al livello del t.i.r. i.

$$i = 6.25\ \% \qquad V(0,\boldsymbol{z}) = 112 \qquad D(0,\boldsymbol{z}) = 3.660696$$

Esercizio 28

Sia dato un mercato in cui al tempo $t_0 = 0$ siano presenti tre titoli obbligazionari: due *zero coupon bond*

$\boldsymbol{x} = \{100, 0, 0\}/\boldsymbol{t}$ al prezzo $p_x = 98.5$ lire,
$\boldsymbol{y} = \{0, 0, 100\}/\boldsymbol{t}$ al prezzo $p_y = 93.28$ lire,

ove lo scadenzario è $\boldsymbol{t} = \{t_1, t_2, t_3\} = \{90, 180, 360\}$ giorni, ed un contratto a termine $\boldsymbol{z}$, che garantisce 200 lire in t_2 al prezzo, pattuito in t_0 e pagabile in t_1, $p_z = 196$ lire.
Si calcolino le strutture per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine implicate dalla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua ed assumendo la durata commerciale dell'anno (360 giorni).

$$i(t_0,t_1) = 6.2319 \qquad i(0,t_0,t_1) = 6.2319$$
$$i(t_0,t_2) = 7.3187 \qquad i(0,t_1,t_2) = 8.4166$$
$$i(t_0,t_3) = 7.2041 \qquad i(0,t_2,t_3) = 7.0897$$

Esercizio 29

Sia dato un *bullet bond* $\boldsymbol{x}_1$ con cedola semestrale del 9% nominale annuo, vita a scadenza di 7 anni e valore nominale di 100 lire. Calcolarne la *duration* rispetto ad una struttura dei tassi di interesse piatta caratterizzata da una intensità istantanea $\delta = 0.08$ anni^{-1}. Indicato poi con $\boldsymbol{x}$ il portafoglio costituito da una quota $\alpha_1 = 1$ del titolo $\boldsymbol{x}_1$ e da una quota α_2 di uno z.c.b. che paga 100 lire in $t = 0.5$, determinare α_2 in modo che $D(0, \boldsymbol{x}) = 1$.

$$D(0, \boldsymbol{x}_1) = \texttt{5.381747} \text{ anni} \qquad \alpha_2 = \texttt{9.522609}$$

Esercizio 30

Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui sia in vigore la seguente struttura per scadenza dei tassi di interesse:

$$i(0, 0.5) = 6.5\% \ , \qquad i(0, 1) = 6.4\% \ , \qquad i(0, 1.5) = 6.6\% \ ,$$

ove il tempo è misurato in anni.
Si calcoli la duration rispetto alla struttura dei tassi assegnata di un *bullet bond* $\boldsymbol{x} = \{4.5, 4.5, 104.5\}$, definito sullo scadenzario $\{0.5, 1, 1.5\}$. Si determini inoltre quante quote α_y di uno *zero coupon bond* $\boldsymbol{y}$, di valore nominale 100 lire e vita a scadenza 6 mesi, bisogna aggiungere al *bullet bond* $\boldsymbol{x}$ per ottenere un portafoglio di *duration* 1 anno.

$$D(0, \boldsymbol{x}) = \texttt{1.43746} \text{ anni} \qquad \alpha_y = \texttt{0.93484}$$

Esercizio 31

Sia dato un mercato in cui al tempo $t_0 = 0$ siano presenti tre titoli obbligazionari i quali, in riferimento ad uno scadenzario $\boldsymbol{t} = \{t_1, t_2, t_3\} = \{90, 180, 360\}$ giorni, siano così composti:
- uno *zero coupon bond* che garantisce $x = 100$ lire in t_1 al prezzo $p_x = 98$ lire;
- un contratto che garantisce $y = 200$ lire in t_2 al prezzo, pattuito in t_0 e pagabile in t_1, $p_y = 196.2$ lire;
- un contratto che garantisce $z = 200$ lire in t_3 al prezzo, pattuito in t_0 e pagabile in t_1, $p_z = 188$ lire.

Si calcolino le strutture per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine implicate dalla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua, assumendo la durata commerciale dell'anno (360 giorni).

$$\begin{aligned} i(t_0, t_1) &= \texttt{8.4166} \qquad & i(0, t_0, t_1) &= \texttt{8.4166} \\ i(t_0, t_2) &= \texttt{8.1957} \qquad & i(0, t_1, t_2) &= \texttt{7.9752} \\ i(t_0, t_3) &= \texttt{8.5541} \qquad & i(0, t_2, t_3) &= \texttt{8.9136} \end{aligned}$$

Esercizio 32

Sia dato un *bullet bond* $\boldsymbol{x}$ di valore nominale 100 lire, cedola semestrale del 9.5% nominale annuo e vita a scadenza di un anno e mezzo. Si supponga che la struttura per scadenza dei tassi di interesse in vigore sul mercato sia data da:

$$\delta(0, s) = a + bs \ ,$$

con $a = 0.07$ e $b = 0.005$, essendo il tempo misurato in anni. Determinare la duration $D(0, \boldsymbol{x})$.
Indicato poi con $\boldsymbol{z}$ un portafoglio costituito da una quota $\alpha_x = 1$ del titolo $\boldsymbol{x}$ e da una quota α_y di uno *zero coupon bond* semestrale $\boldsymbol{y}$ di valore nominale 100 lire, determinare α_y in modo che $D(0, \boldsymbol{z}) = 0.75$.

$$D(0, \boldsymbol{x}) = \texttt{1.43391} \text{ anni} \qquad \alpha_y = \texttt{2.91371}$$

Esercizio 33

Sia dato un mercato in cui al tempo $t_0 = 0$ siano presenti tre titoli obbligazionari i quali, in riferimento ad uno scadenzario $\boldsymbol{t} = \{t_1, t_2, t_3\} = \{2, 4, 8\}$ mesi, siano così composti:
- uno *zero coupon bond* che garantisce 100 lire in t_1 al prezzo di 98.5 lire;
- uno *zero coupon bond* che garantisce 200 lire in t_3 al prezzo di 190 lire;
- un contratto che garantisce 150 lire in t_2 al prezzo, pattuito in t_0 e pagabile in t_1, di 148 lire.

Si calcoli il rendimento a termine $h(t_0, t_2, t_3)$ implicato dalla strutura dei prezzi assegnata, esprimendolo su base annua. Siano inoltre $\boldsymbol{x}$ uno *zcb* unitario con maturity in t_2 e $\boldsymbol{y} = \{50, 50\}/\{t_2, t_3\}$. Determinare quali prezzi p_x e p_y, rispettivamente, devono avere affinché il mercato sia privo di arbitraggi non rischiosi.

$$h(t_0, t_2, t_3) = \texttt{0.06827} \qquad p_x = \texttt{0.97187} \ \textit{lire} \qquad p_y = \texttt{96.0933} \ \textit{lire}$$

Esercizio 34

Sia dato un mercato in cui siano presenti al tempo $t = 0$ quattro titoli obbligazionari $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$. Il titolo $\boldsymbol{w}$ è uno *zcb* a 6 mesi di valore attuale $V(0,\boldsymbol{w}) = 90$ lire; per quanto riguarda gli altri titoli si ha:

$$\begin{array}{lll} V(0,\boldsymbol{x}) = 50 \text{ lire}, & V(0,\boldsymbol{y}) = 200 \text{ lire}, & V(0,\boldsymbol{z}) = 50 \text{ lire}, \\ D(0,\boldsymbol{x}) = \ \ 2 \text{ anni}, & D(0,\boldsymbol{y}) = \ \ 1 \text{ anno}, & D(0,\boldsymbol{z}) = \ \ 9 \text{ mesi}. \end{array}$$

Determinare il valore attuale V e la *duration* D del portafoglio $\boldsymbol{v}$ composto da una quota del titolo $\boldsymbol{w}$ e da una quota del titolo $\boldsymbol{x}$. Calcolare inoltre quante quote α_y del titolo $\boldsymbol{y}$ e quante quote α_z del titolo $\boldsymbol{z}$ bisogna aggiungere a $\boldsymbol{v}$ per ottenere un portafoglio con valore attuale di 200 lire e *duration* di 1 anno.

$$V = 140 \textit{ lire} \qquad D = 1.03571 \textit{ anni} \qquad \alpha_y = 0.2 \qquad \alpha_z = 0.4$$

Esercizio 35

Sia dato un mercato in cui al tempo $t_0 = 0$ siano presenti tre titoli obbligazionari i quali, in riferimento ad uno scadenzario $\boldsymbol{t} = \{t_1, t_2, t_3\} = \{1, 2, 4\}$ semestri, siano così composti:

- uno *zero coupon bond* che garantisce 200 lire in t_1 al prezzo di 192 lire;
- uno *zero coupon bond* che garantisce 100 lire in t_3 al prezzo di 83 lire;
- un contratto che garantisce 50 lire in t_3 al prezzo, pattuito in t_0 e pagabile in t_2, di 45 lire.

Si calcoli il rendimento a termine $h(t_0, t_1, t_2)$ implicato dalla strutura dei prezzi assegnata, esprimendolo su base annua. Siano inoltre $\boldsymbol{x}$ uno *zcb* unitario con maturity in t_2 e $\boldsymbol{y} = \{100, 100\}/\{t_2, t_3\}$. Determinare quali prezzi p_x e p_y, rispettivamente, devono avere affinché il mercato sia privo di arbitraggi non rischiosi.

$$h(t_0, t_1, t_2) = 0.080294 \qquad p_x = 0.92222 \textit{ lire} \qquad p_y = 175.222 \textit{ lire}$$

Esercizio 36

Sia dato un mercato in cui siano presenti al tempo $t = 0$ quattro titoli obbligazionari $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$. Il titolo $\boldsymbol{x}$ è uno *zcb* a un anno e mezzo di valore attuale $V(0,\boldsymbol{x}) = 50$ lire; per quanto riguarda gli altri titoli si ha:

$$\begin{array}{lll} V(0,\boldsymbol{w}) = 100 \text{ lire}, & V(0,\boldsymbol{y}) = 100 \text{ lire}, & V(0,\boldsymbol{z}) = 50 \text{ lire}, \\ D(0,\boldsymbol{w}) = \ \ 6 \text{ mesi}, & D(0,\boldsymbol{y}) = \ \ 6 \text{ mesi}, & D(0,\boldsymbol{z}) = \ \ 3 \text{ mesi}. \end{array}$$

Determinare il valore attuale V e la *duration* D del portafoglio $\boldsymbol{v}$ composto da una quota del titolo $\boldsymbol{w}$ e da una quota del titolo $\boldsymbol{x}$. Calcolare inoltre quante quote α_y del titolo $\boldsymbol{y}$ e quante quote α_z del titolo $\boldsymbol{z}$ bisogna aggiungere a $\boldsymbol{v}$ per ottenere un portafoglio con valore attuale di 400 lire e *duration* di 6 mesi.

$$V = 150 \textit{ lire} \qquad D = 0.83333 \textit{ anni} \qquad \alpha_y = 0.5 \qquad \alpha_z = 4$$

Esercizio 37

Sia dato un mercato in cui al tempo $t_0 = 0$ siano presenti tre titoli obbligazionari i quali, in riferimento ad uno scadenzario $\boldsymbol{t} = \{t_1, t_2, t_3\} = \{1, 2, 4\}$ trimestri, siano così composti:

- uno *zero coupon bond* che garantisce 150 lire in t_1 al prezzo di 147 lire;
- uno *zero coupon bond* che garantisce 100 lire in t_2 al prezzo di 96 lire;
- un contratto che garantisce 200 lire in t_3 al prezzo, pattuito in t_0 e pagabile in t_2, di 192 lire.

Si calcoli il tasso a termine $i(t_0, t_1, t_3)$ implicato dalla strutura dei prezzi assegnata, esprimendolo in forma percentuale e su base annua. Siano inoltre $\boldsymbol{x}$ uno *zcb* unitario con maturity in t_3 e $\boldsymbol{y} = \{10, 10\}/\{t_2, t_3\}$. Determinare quali prezzi p_x e p_y, rispettivamente, devono avere affinché il mercato sia privo di arbitraggi non rischiosi.

$$i(t_0, t_1, t_3) = 8.53708 \ \% \qquad p_x = 0.9216 \textit{ lire} \qquad p_y = 18.816 \textit{ lire}$$

Esercizio 38

Sia dato un mercato in cui siano presenti al tempo $t = 0$ quattro titoli obbligazionari $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$. Il titolo $\boldsymbol{z}$ è uno *zcb* a un anno di valore attuale $V(0,\boldsymbol{z}) = 100$ lire; per quanto riguarda gli altri titoli si ha:

$$\begin{array}{lll} V(0,\boldsymbol{w}) = 50 \text{ lire}, & V(0,\boldsymbol{x}) = 200 \text{ lire}, & V(0,\boldsymbol{y}) = 50 \text{ lire}, \\ D(0,\boldsymbol{w}) = \ \ 1 \text{ anno}, & D(0,\boldsymbol{x}) = \ \ 2 \text{ anni}, & D(0,\boldsymbol{y}) = 18 \text{ mesi}. \end{array}$$

Determinare il valore attuale V e la *duration* D del portafoglio $\boldsymbol{v}$ composto da una quota del titolo $\boldsymbol{w}$ e da una quota del titolo $\boldsymbol{x}$. Calcolare inoltre quante quote α_y del titolo $\boldsymbol{y}$ e quante quote α_z del titolo $\boldsymbol{z}$ bisogna aggiungere a $\boldsymbol{v}$ per ottenere un portafoglio con valore attuale di 500 lire e *duration* di 18 mesi.

$$V = 250 \textit{ lire} \qquad D = 1.8 \textit{ anni} \qquad \alpha_y = 2 \qquad \alpha_z = 1.5$$

Esercizio 39

Sia dato al tempo $t_0 = 0$ un mercato con tre *zero coupon bond* a termine:

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{x} \text{ che paga} & x_1 = 100 \text{ lire al tempo} & t_1 = 90 \text{ giorni}, \\ \boldsymbol{y} \text{ che paga} & y_2 = 150 \text{ lire al tempo} & t_2 = 180 \text{ giorni}, \\ \boldsymbol{z} \text{ che paga} & z_3 = 100 \text{ lire al tempo} & t_3 = 360 \text{ giorni}. \end{array}$$

Siano infine

$$\begin{array}{llllll} V(t_0, t_0, x_1) = & 98.5 \text{ lire il prezzo, pattuito in} & t_0 \text{ e pagabile in} & t_0, \text{ del contratto} & \boldsymbol{x}, \\ V(t_0, t_1, y_2) = & 147.5 \text{ lire il prezzo, pattuito in} & t_0 \text{ e pagabile in} & t_1, \text{ del contratto} & \boldsymbol{y}, \\ V(t_0, t_1, z_3) = & 95 \text{ lire il prezzo, pattuito in} & t_0 \text{ e pagabile in} & t_1, \text{ del contratto} & \boldsymbol{z}. \end{array}$$

Si calcolino le strutture per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine implicate dalla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua ed assumendo la durata commerciale dell'anno (360 giorni). Considerando poi il titolo $\boldsymbol{w} = \{10, 20, 10\}/\{t_1, t_2, t_3\}$, determinarne un prezzo P che impedisca la possibilità di arbitraggi non rischiosi.

$$\begin{array}{lll} i(t_0, t_1) = 6.232\ \% & i(0, t_0, t_1) = 6.232\ \% & \\ i(t_0, t_2) = 6.592\ \% & i(0, t_1, t_2) = 6.954\ \% & \\ i(t_0, t_3) = 6.866\ \% & i(0, t_2, t_3) = 7.141\ \% & P = 38.5792 \end{array}$$

Esercizio 40

Sia dato un mercato in cui al tempo $t_0 = 0$ sia in vigore la seguente struttura dei rendimenti a scadenza a termine:

$$h(t_0, t_0, t_1) = 0.068 \text{ anni}^{-1}, \qquad h(t_0, t_1, t_2) = 0.063 \text{ anni}^{-1}, \qquad h(t_0, t_2, t_3) = 0.07 \text{ anni}^{-1},$$

ove $\{t_1, t_2, t_3\} = \{1, 2, 3\}$ semestri. Determinare le strutture dei tassi a pronti e dei tassi a termine relative allo stesso scadenzario, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base semestrale.

$$\begin{array}{ll} i(t_0, t_1) = 3.458\ \% & i(0, t_0, t_1) = 3.458\ \% \\ i(t_0, t_2) = 3.329\ \% & i(0, t_1, t_2) = 3.2\ \% \\ i(t_0, t_3) = 3.407\ \% & i(0, t_2, t_3) = 3.562\ \% \end{array}$$

Esercizio 41

Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui al tempo $t = 0$ sia in vigore la seguente struttura per scadenza dei tassi di interesse:

$$i(0, 0.5) = 4.5\%, \qquad i(0, 1) = 4.3\%, \qquad i(0, 1.5) = 4.6\%, \qquad i(0, 2) = 4.4\%,$$

essendo il tempo misurato in anni ed essendo i tassi su base semestrale. Calcolare valore attuale e *duration* del flusso $\boldsymbol{x} = \{10, 10, 10, 10\}/\{0.5, 1, 1.5, 2\}$.

Supponiamo inoltre che sul mercato siano disponibili due titoli $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$, con valore attuale e *duration*, calcolati rispetto alla struttura data, rispettivamente $V(0, \boldsymbol{y}) = 20$ lire, $D(0, \boldsymbol{y}) = 0.5$ anni e $V(0, \boldsymbol{z}) = 10$ lire, $D(0, \boldsymbol{z}) = 2$ anni. Costruire un portafoglio $\alpha_y \boldsymbol{y} + \alpha_z \boldsymbol{z}$ con stesso valore attuale e *duration* la metà di quella del flusso $\boldsymbol{x}$.

$$\begin{array}{ll} V(0, \boldsymbol{x}) = 35.91748 \text{ lire} & \alpha_y = 1.662507 \\ D(0, \boldsymbol{x}) = 1.222789 \text{ anni} & \alpha_z = 0.266734 \end{array}$$

Esercizio 42

Sia dato un mercato con tre titoli obbligazionari: due *zero coupon bond* $\boldsymbol{x} = \{100, 0, 0\}/\{t_1, t_2, t_3\}$ e $\boldsymbol{y} = \{0, 100, 0\}/\{t_1, t_2, t_3\}$ ed un contratto a termine $\boldsymbol{z}$ che garantisce 200 lire in t_3. Siano $V(0, \boldsymbol{x}) = 98.5$ lire e $V(0, \boldsymbol{y}) = 97$ i prezzi di mercato al tempo $t_0 = 0$ dei due *zcb* e sia invece $V(0, t_1, t_3; \boldsymbol{z}) = 190$ lire il prezzo, pattuito in t_0 e pagabile in t_1, del contratto a termine $\boldsymbol{z}$. Siano infine $t_1 = 90$ giorni, $t_2 = 180$ giorni e $t_3 = 360$ giorni. Si calcolino le strutture per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine implicate dalla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua ed assumendo la durata commerciale dell'anno (360 giorni).

$$\begin{array}{ll} i(t_0, t_1) = 6.232\ \% & i(0, t_0, t_1) = 6.232\ \% \\ i(t_0, t_2) = 6.281\ \% & i(0, t_1, t_2) = 6.331\ \% \\ i(t_0, t_3) = 6.866\ \% & i(0, t_2, t_3) = 7.454\ \% \end{array}$$

Esercizio 43

Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui al tempo $t = 0$ sia in vigore la seguente struttura per scadenza dei tassi di interesse: $i(0, 0.5) = 4.1\%$, $i(0, 1) = 5.0\%$, $i(0, 1.5) = 4.5\%$, $i(0, 2) = 5.7\%$, essendo il tempo misurato in anni ed essendo i tassi su base semestrale. Calcolare valore attuale e *duration* del *bullet bond* $\boldsymbol{x}$ di vita a scadenza 2 anni, capitale nominale 100 lire, cedola semestrale e tasso nominale annuo 8.5%.
Supponiamo inoltre che sul mercato siano disponibili due titoli $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$. Il titolo $\boldsymbol{y}$ è uno *zero coupon bond* che paga 100 lire a 6 mesi, mentre il titolo $\boldsymbol{z}$ è un *bullet bond* con le stesse cedole e capitale nominale del titolo $\boldsymbol{x}$, ma vita a scadenza di un anno. Costruire un portafoglio $\alpha_y \boldsymbol{y} + \alpha_z \boldsymbol{z}$ con lo stesso valore attuale del flusso $\boldsymbol{x}$ e *duration* la metà di quella del flusso $\boldsymbol{x}$.

$V(0, \boldsymbol{x}) = 95.17899$ lire $\qquad D(0, \boldsymbol{x}) = 1.875593$ anni $\qquad \alpha_y = 0.085807 \qquad \alpha_z = 0.881345$

Esercizio 44

Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui sia in vigore una struttura struttura per scadenza dei tassi di interesse caratterizzata da una intensità istantanea di interesse costante $\delta = 0.086$ anni^{-1}. Calcolare il valore attuale $V(0, \boldsymbol{x})$ e la *duration* del *bullet bond* $\boldsymbol{x}$ di valore facciale 100 lire, cedola annuale dell'8% e vita a scadenza di 10 anni. Sia inoltre dato uno *zcb* $\boldsymbol{y}$ a 2 anni con valore facciale 100 lire. Costruire un portafoglio composto da α_x quote del titolo $\boldsymbol{x}$ e da α_y quote del titolo $\boldsymbol{y}$, che abbia lo stesso valore attuale di $\boldsymbol{x}$ ma *duration* di 4 anni.

$V(0, \boldsymbol{x}) = 93.7013$ lire $\qquad D(0, \boldsymbol{x}) = 7.14791$ anni $\qquad \alpha_x = 0.38851 \qquad \alpha_y = 0.68051$

Esercizio 45

Siano $V(t_0, x_1) = 98$ lire, $V(t_0, x_2) = 144.5$ lire e $V(t_0, x_3) = 93$ lire i prezzi di mercato al tempo $t_0 = 0$ di tre titoli a cedola nulla con valori di rimborso $x_1 = 100$ lire, $x_2 = 150$ lire e $x_3 = 100$ lire, esigibili rispettivamente ai tempi $t_1 = 90$ giorni, $t_2 = 180$ giorni e $t_3 = 360$ giorni. Assumendo la durata commerciale dell'anno (360 giorni), determinare i tassi $i(0, t_1, t_2)$ e $i(0, t_1, t_3)$, esprimendoli in forma percentuale e su base annua. Considerando poi il titolo $\boldsymbol{w} = \{10, 10\}/\{t_2, t_3\}$, determinarne un prezzo a termine P in t_1 in modo non siano possibili arbitraggi non rischiosi.

$i(t_0, t_1, t_2) = 7.102$ % $\qquad i(t_0, t_1, t_3) = 7.232$ % $\qquad P = 19.3197$ lire

Esercizio 46

Sia dato al tempo $t_0 = 0$ un *bullet bond* $\boldsymbol{x}$ di valore nominale 100 lire, cedola semestrale del 9% nominale annuo e vita a scadenza di 2 anni. Si supponga che sul mercato sia in vigore la seguente struttura per scadenza dei tassi di interesse:

$$i(0, 0.5) = 8.5\% \qquad i(0, 1) = 8.6\% \qquad i(0, 1.5) = 8.7\% \qquad i(0, 2) = 8.6\%$$

Si calcoli il valore attuale e la durata media finanziaria del titolo $\boldsymbol{x}$. Si determini infine con quale tasso nominale annuo $\tilde{\imath}$ il titolo presenterebbe una durata media finanziaria di 1.85 anni.

$V(0, \boldsymbol{x}) = 101.039$ lire $\qquad D(0, \boldsymbol{x}) = 1.8752$ anni $\qquad \tilde{\imath} = 11.25$ %

Esercizio 47

Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui, al tempo $t_0 = 0$ e relativamente allo scadenzario $\boldsymbol{t} = \{t_1, t_2, t_3\} = \{1, 2, 3\}$ anni, siano trattati:
– un titolo che, al prezzo di 92 lire pattuito e pagabile in t_0, garantisce 100 lire in t_1;
– un titolo che, al prezzo di 170 lire pattuito in t_0 e pagabile in t_1, garantisce 200 lire in t_3;
– un titolo che, al prezzo di 91 lire pattuito in t_0 e pagabile in t_2, garantisce 100 lire in t_3.
Determinare le strutture dei tassi a pronti e dei tassi a termine in vigore su questo mercato e relative allo scadenzario $\boldsymbol{t}$, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua.

$i(t_0, t_1) = 8.696$ % $\qquad i(t_0, t_0, t_1) = 8.696$ %
$i(t_0, t_2) = 7.874$ % $\qquad i(t_0, t_1, t_2) = 7.059$ %
$i(t_0, t_3) = 8.542$ % $\qquad i(t_0, t_2, t_3) = 9.89$ %

Esercizio 48

Sia dato un titolo a cedola fissa di valore nominale 100 lire, cedola semestrale dell'8.5% nominale annuo e vita a scadenza di dieci anni. Si consideri una struttura di valutazione piatta, di intensità istantanea $\delta = 0.094$ anni^{-1} e si determini il valore attuale V, la durata media finanziaria D, la semielasticità (rispetto a δ) S e l'elasticità E (rispetto a δ) del titolo.

$V = 92.88081 \qquad S = -6.8015$
$D = 6.801496 \qquad E = -0.63934$

Esercizio 49

Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui, al tempo $t_0 = 0$ e relativamente allo scadenzario $\boldsymbol{t} = \{t_1, t_2, t_3\} = \{1, 2, 3\}$ anni, siano trattati:
– un titolo a cedola nulla con vita a scadenza 2 anni, capitale nominale 100 lire e prezzo 81 lire;
– un titolo a cedola fissa con vita a scadenza 2 anni, cedola annua di 5 lire, capitale nominale 100 lire e prezzo 89.5 lire;
– un titolo a cedola fissa, di vita a scadenza 3 anni, cedola annua di 6 lire, capitale nominale 100 lire e prezzo 90 lire.
Determinare le strutture dei tassi a pronti e dei tassi a termine in vigore su questo mercato e relative allo scadenzario $\boldsymbol{t}$, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua.

$$i(t_0, t_1) = 12.36\ \% \qquad i(t_0, t_0, t_1) = 12.36\ \%$$
$$i(t_0, t_2) = 11.11\ \% \qquad i(t_0, t_1, t_2) = 9.877\ \%$$
$$i(t_0, t_3) = 9.926\ \% \qquad i(t_0, t_2, t_3) = 7.594\ \%$$

Esercizio 50

Sia dato un titolo a cedola nulla $\boldsymbol{x}$ con vita a scadenza di tre mesi. Si consideri una struttura dei tassi di interesse caratterizzata da una funzione intensità istantanea di interesse costante $\delta = 0.06$ anni^{-1}. Si determinino rispetto a tale stuttura le seguenti quantità:

la semielasticità rispetto a δ:	-0.25	l'elasticità rispetto a δ:	-0.015
la convessità rispetto a δ:	0.0625	la convessità relativa rispetto a δ:	-0.25

Esercizio 51

Si consideri un mercato in cui al tempo $t = 0$ sia in vigore una legge di equivalenza finanziaria definita da:

$$v(0, s) = \frac{1}{1 + ks} \ , \qquad \text{con} \quad k = 0.08 \ ,$$

essendo il tempo misurato in anni. Determinare le struttura per scadenza dei tassi di interesse $i(0, s)$ e dell'intensità istantanea di interesse $\delta(0, s)$ relativamente allo scadenzario $\{\,0.5\,,\,1\,,\,1.5\,,\,2\,\}$ anni.

$$i(0, 0.5) = 8.16\ \% \qquad \delta(0, 0.5) = 0.076923\ \text{anni}^{-1}$$
$$i(0, 1) = 8\ \% \qquad \delta(0, 1) = 0.074074\ \text{anni}^{-1}$$
$$i(0, 1.5) = 7.848\ \% \qquad \delta(0, 1.5) = 0.071429\ \text{anni}^{-1}$$
$$i(0, 2) = 7.7033\ \% \qquad \delta(0, 2) = 0.068966\ \text{anni}^{-1}$$

Esercizio 52

Si consideri un mercato in cui al tempo $t = 0$ sia in vigore una legge di equivalenza finanziaria definita da:

$$v(0, s) = 1 - ks \ , \qquad \text{con} \quad k = 0.08 \ ,$$

essendo il tempo misurato in anni. Determinare le struttura per scadenza dei tassi di interesse $i(0, s)$ e dell'intensità istantanea di interesse $\delta(0, s)$ relativamente allo scadenzario $\{\,0.5\,,\,1\,,\,1.5\,,\,2\,\}$ anni.

$$i(0, 0.5) = 8.5069\ \% \qquad \delta(0, 0.5) = 0.083333\ \text{anni}^{-1}$$
$$i(0, 1) = 8.6957\ \% \qquad \delta(0, 1) = 0.086957\ \text{anni}^{-1}$$
$$i(0, 1.5) = 8.8959\ \% \qquad \delta(0, 1.5) = 0.090909\ \text{anni}^{-1}$$
$$i(0, 2) = 9.1089\ \% \qquad \delta(0, 2) = 0.095238\ \text{anni}^{-1}$$

Esercizio 53

Sia consideri un mercato di titoli obbligazionari ove sono disponibili tre titoli $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$. Si supponga che valore attuale e duration di tali titoli siano: $V(\boldsymbol{x}) = 150$ lire, $D(\boldsymbol{x}) = 1.5$ anni; $V(\boldsymbol{y}) = 200$ lire, $D(\boldsymbol{y}) = 7$ anni; $V(\boldsymbol{z}) = 100$ lire, $D(\boldsymbol{z}) = 4.5$ anni.
Si costruisca un portafoglio $\boldsymbol{u} = \alpha_x \boldsymbol{x} + \alpha_y \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ in modo che $V(\boldsymbol{u}) = 300$ lire e $D(\boldsymbol{u}) = 6$ anni. Determinare infine, assumendo una struttura dei tassi piatta di intensità istantanea $\delta = 0.09$ anni^{-1}, la semielasticità $S(i)$ e l'elasticità $E(i)$ (entrambe rispetto al tasso di interesse i) del portafoglio $\boldsymbol{u}$.

$$\alpha_x = 0.060606 \qquad S(i) = -5.48359$$
$$\alpha_y = 0.954545 \qquad E(i) = -0.51641$$

Esercizio 54

Sia consideri un mercato di titoli obbligazionari ove sono disponibili due titoli, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$. Si supponga che valore attuale e duration dei due titoli siano: $V(\boldsymbol{x}) = 150$ lire, $D(\boldsymbol{x}) = 2.5$ anni, $V(\boldsymbol{y}) = 250$ lire, $D(\boldsymbol{y}) = 7.8$ anni. Si costruisca un portafoglio $\boldsymbol{z} = \alpha_x \boldsymbol{x} + \alpha_y \boldsymbol{y}$ in modo che$V(\boldsymbol{z}) = 300$ lire e $D(\boldsymbol{z}) = 3$ anni. Determinare infine i valori minimo e massimo che può assumere la duration di un portafoglio costruito dai due titoli senza effettuare vendite allo scoperto.

$$\alpha_x = \texttt{1.81132} \qquad D_{\min} = \texttt{2.5} \text{ anni}$$
$$\alpha_y = \texttt{0.113208} \qquad D_{\max} = \texttt{7.8} \text{ anni}$$

Esercizio 55

Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui al tempo $t_0 = 0$ sia in vigore la seguente struttura per scadenza dei tassi di interesse: $i(t_0, t_1) = 9\%$, $i(t_0, t_2) = 9.5\%$, $i(t_0, t_3) = 9.4\%$, ove $\boldsymbol{t} = \{t_1, t_2, t_3\} = \{0.5, 1, 1.5\}$ anni. Si consideri un titolo a cedola fissa semestrale $\boldsymbol{x}$, con scadenza in t_3 e capitale nominale 300 lire. Detta I la cedola di $\boldsymbol{x}$, determinare per quale valore di I si ottiene che $D(t_0, \boldsymbol{x}) = 1.42$ anni e calcolare il valore attuale del titolo con tale cedola.

$$I = \texttt{17.55386} \text{ lire} \qquad V(0, \boldsymbol{x}) = \texttt{310.3626} \text{ lire}$$

Esercizio 56

Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui al tempo $t = 0$ sia in vigore la seguente struttura per scadenza dei tassi di interesse:

$$i(0,1) = 10\% \ , \qquad i(0,2) = 11\% \ , \qquad i(0,3) = 10\% \ , \qquad i(0,4) = 11\% \ .$$

Si consideri il titolo $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{0, 10, 0, 10\}/\{1, 2, 3, 4\}$. Si determini la *duration* $D(0, \boldsymbol{x})$ ed il momento secondo della *duration* $D^{(2)}(0, \boldsymbol{x})$. Ipotizzando inoltre che il mercato si evolva in condizioni di certezza, determinare le quantità $D(t', \boldsymbol{x})$ e $D^{(2)}(t', \boldsymbol{x})$ per $t' = 1$.

$$D(0, \boldsymbol{x}) = \texttt{2.896017} \qquad D(t', \boldsymbol{x}) = \texttt{1.896017}$$
$$D^{(2)}(0, \boldsymbol{x}) = \texttt{9.376103} \qquad D^{(2)}(t', \boldsymbol{x}) = \texttt{4.584069}$$

Esercizio 57

Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui, al tempo $t_0 = 0$ e relativamente allo scadenzario $\boldsymbol{t} = \{t_1, t_2, t_3\} = \{1, 2, 3\}$ anni, siano trattati:
– un contratto che garantisce 100 lire in t_1 al prezzo, pattuito e pagabile in t_0, di 91 lire;
– un contratto che garantisce 100 lire in t_2 al prezzo, pattuito e pagabile in t_0, di 83 lire;
– un contratto che garantisce 9 lire in t_2 e 109 lire in t_3 al prezzo, pattuito in t_0 e pagabile in t_1, di 97.5 lire.
Determinare le strutture dei tassi a pronti e dei tassi a termine in vigore su questo mercato e relative allo scadenzario $\boldsymbol{t}$, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua.

$$i(t_0, t_1) = \texttt{9.89011}\ \% \qquad i(t_0, t_0, t_1) = \texttt{9.89011}\ \%$$
$$i(t_0, t_2) = \texttt{9.76426}\ \% \qquad i(t_0, t_1, t_2) = \texttt{9.63855}\ \%$$
$$i(t_0, t_3) = \texttt{10.2873}\ \% \qquad i(t_0, t_2, t_3) = \texttt{11.3408}\ \%$$

Esercizio 58

Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui, al tempo $t_0 = 0$, sia in vigore una legge di equivalenza finanziaria caratterizzata dalla seguente intensità istantanea di interesse (tempi misurati in anni):

$$\delta(0, s) = \begin{cases} 0.09 & \text{se } s \leq 0.7, \\ 0.08 & \text{se } 0.7 < s. \end{cases}$$

In riferimento allo scadenzario $\{t_1, t_2, t_3\} = \{0.5, 1, 1.5\}$ anni, determinare le struttura per scadenza dell'intensità di rendimento a scadenza $h(0, s)$ e dei tassi di interesse $i(0, s)$, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua.

$$h(0, t_1) = \texttt{0.09} \text{ anni}^{-1} \qquad i(0, t_1) = \texttt{9.41743}\ \%$$
$$h(0, t_2) = \texttt{0.087} \text{ anni}^{-1} \qquad i(0, t_2) = \texttt{9.08967}\ \%$$
$$h(0, t_3) = \texttt{0.084667} \text{ anni}^{-1} \qquad i(0, t_3) = \texttt{8.83542}\ \%$$

Esercizio 59

Sia dato un mercato in cui al tempo $t_0 = 0$ siano presenti tre titoli obbligazionari i quali, in riferimento ad uno scadenzario $\boldsymbol{t} = \{t_1, t_2, t_3\} = \{30, 90, 180\}$ giorni, siano così composti:
- un titolo a cedola nulla $\boldsymbol{x}$ che garantisce 100 lire in t_1 al prezzo di 99.5 lire;
- un titolo a cedola nulla $\boldsymbol{y}$ che garantisce 150 lire in t_2 al prezzo di 147.5 lire;
- un contratto $\boldsymbol{z}$ che garantisce 100 lire in t_3 al prezzo, pattuito in t_0 e pagabile in t_2, di 98 lire.

(a) Si calcolino le strutture dei tassi a pronti e dei tassi a termine implicate dai prezzi assegnati, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua ed assumendo la durata commerciale dell'anno (360 giorni).

$i(t_0, t_1) = 6.2$ % $\qquad i(t_0, t_0, t_1) = 6.2$ %

$i(t_0, t_2) = 6.954$ % $\qquad i(t_0, t_1, t_2) = 7.333$ %

$i(t_0, t_3) = 7.683$ % $\qquad i(t_0, t_2, t_3) = 8.417$ %

(b) Considerato il portafoglio $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, si supponga che esso sia quotato sul mercato al prezzo $P = 244.5$ lire. Dire con quale delle seguenti strategie è possibile realizzare un profitto certo al tempo t_0, avendo chiuso in pareggio la posizione negli altri periodi; indicare inoltre l'eventuale guadagno G:

× vendere allo scoperto $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ e acquistare $\boldsymbol{w}$;
vendere allo scoperto $\boldsymbol{w}$ e acquistare $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$;
vendere allo scoperto $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ e acquistare $\boldsymbol{z}$;
vendere allo scoperto $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{z}$ e acquistare $\boldsymbol{w}$;
vendere allo scoperto $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ e acquistare $\boldsymbol{w}$;
nessuna di quelle precedentemente indicate;
non esiste nessuna strategia.

$G = 2.5$ lire

Esercizio 60

Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui, al tempo $t = 0$, siano trattati i titoli $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ e per i quali, rispetto alla struttura dei tassi in vigore sul mercato, risulta:

$V(0, \boldsymbol{x}) = 150$ lire, $\quad V(0, \boldsymbol{y}) = 150$ lire, $\quad D(0, \boldsymbol{x}) = 7$ mesi, $\quad D(0, \boldsymbol{y}) = 4$ anni e 9 mesi.

Si calcoli il valore attuale V e la durata media finanziaria D del portafoglio $\boldsymbol{z}$ composto da $\alpha_x = 0.5$ quote del titolo $\boldsymbol{x}$ e da $\alpha_y = 2.5$ quote del titolo $\boldsymbol{y}$.
Si supponga quindi di volere modificare il portafoglio $\boldsymbol{z}$, variando la sola quota relativa al titolo $\boldsymbol{x}$, al fine di ottenere un nuovo portafoglio $\boldsymbol{w}$ con durata media finanziaria pari a 3 anni. Si determini la variazione $\Delta\alpha_x$ della quota α_x necessaria allo scopo e l'incremento ΔV di valore del portafoglio $\boldsymbol{w}$ ottenuto, rispetto al portafoglio iniziale $\boldsymbol{z}$.

$V = 450$ lire $\qquad D = 4.055556$ anni

$\Delta\alpha_x = 1.310345$ $\qquad \Delta V = 196.5517$ lire

Esercizio 61

Sia dato un mercato di TCN a termine in cui, al tempo $t_0 = 0$ ed in riferimento allo scadenzario $\{t_1, t_2, t_3\} = \{1, 2, 3\}$ anni, siano trattati:

a) un contratto che paga 200 lire in t_3 al prezzo, pattuito in t_0 e pagabile in t_1, di 166 lire;
b) un contratto che paga 100 lire in t_1 al prezzo, pattuito in t_0 e pagabile in t_0, di 91 lire;
c) un contratto che paga 300 lire in t_2 al prezzo, pattuito in t_0 e pagabile in t_1, di 276 lire.

In riferimento allo scadenzario assegnato, determinare le struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti e di quelli a termine, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua.

$i(t_0, t_1) = 9.89011$ % $\qquad i(t_0, t_0, t_1) = 9.89011$ %

$i(t_0, t_2) = 9.29125$ % $\qquad i(t_0, t_1, t_2) = 8.69565$ %

$i(t_0, t_3) = 9.80619$ % $\qquad i(t_0, t_2, t_3) = 10.8434$ %

Esercizio 62

Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui, al tempo $t = 0$, siano trattati i titoli $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ e per i quali, rispetto alla struttura dei tassi in vigore sul mercato, risulta:

$$V(0,\boldsymbol{x}) = 200 \text{ lire}, \qquad V(0,\boldsymbol{y}) = 100 \text{ lire}, \qquad D(0,\boldsymbol{x}) = 9 \text{ mesi}, \qquad D(0,\boldsymbol{y}) = 5 \text{ anni e } 8 \text{ mesi}.$$

Si calcoli il valore attuale V e la durata media finanziaria D del portafoglio $\boldsymbol{z}$ composto da $\alpha_x = 1.5$ quote del titolo $\boldsymbol{x}$ e da $\alpha_y = 2$ quote del titolo $\boldsymbol{y}$.

Si supponga quindi di volere modificare il portafoglio $\boldsymbol{z}$, variando la sola quota relativa al titolo $\boldsymbol{x}$, al fine di ottenere un nuovo portafoglio $\boldsymbol{w}$ con valore attuale pari a 450 lire. Si determini la variazione $\Delta\alpha_x$ della quota α_x necessaria allo scopo e l'incremento ΔD di durata media finanziaria del portafoglio $\boldsymbol{w}$ ottenuto, rispetto al portafoglio iniziale $\boldsymbol{z}$.

$V =$ 500 lire $\qquad D =$ 2.716667 anni

$\Delta\alpha_x =$ 0.25 $\qquad \Delta D =$ 0.218519 anni

Esercizio 63

Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui, al tempo $t = 0$ ed in riferimento allo scadenzario $\boldsymbol{t} = \{1, 2\}$ anni, siano trattati i titoli: $\boldsymbol{x} = \{100, 0\}$ lire al prezzo a pronti di 92 lire, $\boldsymbol{y} = \{0, 100\}$ lire al prezzo a pronti di 85 lire, $\boldsymbol{z} = \{10, 110\}$ lire al prezzo a pronti di 98 lire.

Determinare la struttura per scadenza dei tassi a pronti determinata dai prezzi dei soli titoli $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

$i(0,1) =$ 8.69565 % $\qquad i(0,2) =$ 8.46523 %

Costruire quindi un arbitraggio non rischioso che garantisca un profitto certo di 10 lire al tempo $t = 2$ anni, avendo chiuso in pareggio le posizioni agli altri istanti.

azione (A):	acquisto / × vendita	di 0.180851 unità del titolo $\boldsymbol{x}$
azione (B):	acquisto / × vendita	di 1.889362 unità del titolo $\boldsymbol{y}$
azione (C):	× acquisto / vendita	di 1.808511 unità del titolo $\boldsymbol{z}$

Esercizio 64

Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui, al tempo $t = 0$ ed in riferimento allo scadenzario $\boldsymbol{t} = \{0.5, 1\}$ anni, siano trattati i titoli: $\boldsymbol{x} = \{300, 0\}$ lire al prezzo in $t = 0$ di 287 lire, $\boldsymbol{y} = \{0, 50\}$ lire al prezzo in $t = 0$ di 46 lire, $\boldsymbol{z} = \{0, 100\}$ lire.

Determinare la struttura per scadenza dei tassi a pronti determinata dai prezzi dei soli titoli $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

$i(0,0.5) =$ 9.26441 % $\qquad i(0,1) =$ 8.69565 %

Si ipotizzi quindi che il mercato si evolva in condizioni di certezza e si supponga di sapere in $t = 0$ che il prezzo che il titolo $\boldsymbol{z}$ avrà in $t = 0.5$ sarà 97 lire. Si costruisca in $t = 0$ un arbitraggio non rischioso che garantisca un profitto certo immediato, avendo chiuso in pareggio le posizioni nei successivi istanti.

azione (A):	acquisto / × vendita	in $t =$ 0 anni	di 0.323333 unità del titolo $\boldsymbol{x}$
azione (B):	× acquisto / vendita	in $t =$ 0 anni	di 2 unità del titolo $\boldsymbol{y}$
azione (C):	acquisto / × vendita	in $t =$ 0.5 anni	di 1 unità del titolo $\boldsymbol{z}$

[Osservazione: La soluzione della seconda parte dell'esercizio non è unica per quanto riguarda le unità dei titoli (terza colonna). La soluzione riportata garantisce un profitto certo immediato di $G = 0.7966667$ lire; si vede facilmente che, fissando arbitrariamente $G > 0$, esiste un'unica soluzione che garantisce il profitto certo immediato G e chiude in pareggio le posizioni nei successivi istanti.]

Esercizio 65

Si consideri un mercato in cui, al tempo $t = 0$, sia in vigore una legge di equivalenza finanziaria definita da:

$$v(0, s) = \frac{1}{1 + ks} \ , \qquad \text{con} \quad k = 0.091 \ ,$$

essendo il tempo misurato in anni. Sia dato un titolo a cedola fissa semestrale $\boldsymbol{x}$, con vita a scadenza un anno e mezzo, capitale nominale 5 000 000 lire e tasso nominale annuo 12.5%. Se ne determini il valore attuale $V(0, \boldsymbol{x})$ e la durata media finanziaria $D(0, \boldsymbol{x})$. Si consideri quindi un titolo a cedola nulla $\boldsymbol{y}$, con vita a scadenza 6 mesi e capitale nominale 5 000 000 lire. Si determini il numero α di quote di $\boldsymbol{y}$ che bisogna aggiungere al titolo $\boldsymbol{x}$, per ottenere un portafoglio di durata media finanziaria pari a 7 mesi.

$V = 5259774$ lire $\qquad D = 1.415944$ anni $\qquad \alpha = 10.98864$

Esercizio 66

Si consideri un mercato in cui, al tempo $t = 0$, sia in vigore una legge di equivalenza finanziaria definita da:

$$v(0, s) = 1 - ks \ , \qquad \text{con} \quad k = 0.092 \quad \text{e} \quad 0 \le s < \frac{1}{k} \ ,$$

essendo il tempo misurato in anni. Sia dato un titolo a cedola fissa semestrale $\boldsymbol{x}$, con vita a scadenza un anno e mezzo, capitale nominale 5 000 000 lire e tasso nominale annuo 12.5%. Se ne determini il valore attuale $V(0, \boldsymbol{x})$ e la durata media finanziaria $D(0, \boldsymbol{x})$. Si consideri quindi un titolo a cedola nulla $\boldsymbol{y}$, con vita a scadenza 6 mesi e capitale nominale 5 000 000 lire. Si determini il numero α di quote di $\boldsymbol{y}$ che bisogna aggiungere al titolo $\boldsymbol{x}$, per ottenere un portafoglio di durata media finanziaria pari a 8 mesi.

$V = 5161250$ lire $\qquad D = 1.414749$ anni $\qquad \alpha = 4.856656$

Esercizio 67

Si consideri un mercato in cui, al tempo $t = 0$, sia in vigore una legge di equivalenza finanziaria definita da:

$$\delta(0, s) = 0.09 - 0.001s \qquad s \ge 0 \ ,$$

essendo il tempo misurato in anni. Si determinino le seguenti grandezze a pronti ed a termine:

$$\begin{aligned} v(0, 3.5) &= 0.734273 & \qquad v(0, 3.5, 5.0) &= 0.879304 \\ h(0, 2.0) &= 0.089 \quad \text{anni}^{-1} & \qquad h(0, 2.0, 3.5) &= 0.08725 \quad \text{anni}^{-1} \\ i(0, 0.5) &= 9.39008\ \% & \qquad i(0, 0.5, 2.5) &= 9.25343\ \% \end{aligned}$$

Esercizio 68

Si consideri un mercato in cui, al tempo $t = 0$, sia in vigore una legge di equivalenza finanziaria definita da:

$$\delta(0, s) = \begin{cases} 0.09 & \text{se} \quad 0 \le s \le 0.3 \\ 0.08 & \text{se} \quad s > 0.3 \end{cases}$$

essendo il tempo misurato in anni. Si determinino le strutture per scadenza dei tassi a pronti ed a termine relative allo scadenzario $\{0.5, 1, 1.5\}$.

$$\begin{aligned} i(0, 0.5) &= 8.98063\ \% & \qquad i(0, 0, 0.5) &= 8.98063\ \% \\ i(0, 1) &= 8.65418\ \% & \qquad i(0, 0.5, 1) &= 8.32871\ \% \\ i(0, 1.5) &= 8.54558\ \% & \qquad i(0, 1, 1.5) &= 8.32871\ \% \end{aligned}$$

Esercizio 69

Si consideri un mercato di titoli obbligazionari in cui, al tempo $t = 0$ ed in riferimento allo scadenzario $\{1, 2, 3\}$ anni, sono quotati tre titoli:

$\boldsymbol{x} = \{10, 0, 110\}$ lire, al prezzo di 99 lire, $\qquad \boldsymbol{y} = \{5, 5, 5\}$ lire, al prezzo di 13.2 lire,
$\boldsymbol{z} = \{5, 105, 0\}$ lire, al prezzo di 98 lire.

Si costruisca un portafoglio composto da α_x quote di $\boldsymbol{x}$, da α_y quote di $\boldsymbol{y}$, e da α_z quote di $\boldsymbol{z}$, in modo tale che il flusso di pagamenti del portafoglio sia $\boldsymbol{u} = \{100, 200, 100\}$ lire. Si determini infine un prezzo P per il flusso $\boldsymbol{u}$, in modo che non siano possibili arbitraggi non rischiosi.

$\alpha_x = 0.050251 \qquad \alpha_y = 18.89447 \qquad \alpha_z = 1.005025$

$P = 352.874$ lire

Esercizio 70

Si consideri un mercato dei capitali in cui, al tempo $t = 0$, è in vigore una struttura per scadenza dei tassi di interesse caratterizzata dalla funzione intensità istantanea di interesse

$$\delta(0,s) = \begin{cases} 0.080 & \text{se } 0 \le s < 0.25 \ , \\ 0.090 & \text{se } 0.25 \le s < 1.25 \ , \\ 0.085 & \text{se } 1.25 \le s \ . \end{cases}$$

In riferimento allo scadenzario $\{1, 2, 3\}$, calcolare le strutture per scadenza dell'intensità di rendimento a scadenza a pronti e dei tassi di interesse a pronti.

$$\begin{aligned} h(0,1) &= 0.0875 & i(0,1) &= 9.1442\ \% \\ h(0,2) &= 0.086875 & i(0,2) &= 9.076\ \% \\ h(0,3) &= 0.08625 & i(0,3) &= 9.0079\ \% \end{aligned}$$

Esercizio 71

Si consideri un mercato dei capitali in cui, al tempo $t = 0$, è in vigore una struttura per scadenza dei tassi di interesse caratterizzata dalla funzione intensità istantanea di interesse

$$\delta(0,s) = \begin{cases} 0.080 & \text{se } 0 \le s < 0.75 \ , \\ 0.070 & \text{se } 0.75 \le s < 1.25 \ , \\ 0.075 & \text{se } 1.25 \le s \ . \end{cases}$$

In riferimento allo scadenzario $\{1, 2, 3\}$, calcolare le strutture per scadenza dell'intensità di rendimento a scadenza a pronti e dei tassi di interesse a pronti.

$$\begin{aligned} h(0,1) &= 0.0775 & i(0,1) &= 8.0582\ \% \\ h(0,2) &= 0.075625 & i(0,2) &= 7.8558\ \% \\ h(0,3) &= 0.075417 & i(0,3) &= 7.8333\ \% \end{aligned}$$

Esercizio 72

Si consideri un mercato in cui, al tempo $t = 0$, sia in vigore una legge di equivalenza finanziaria definita da:

$$\delta(0,s) = \begin{cases} 0.08 & \text{se} \quad 0 \le s < 0.2 \\ 0.09 & \text{se} \quad 0.2 \le s < 1 \\ 0.02s + 0.07 & \text{se} \quad 1 \le s \end{cases}$$

essendo il tempo misurato in anni. Si determinino le strutture per scadenza dei tassi a pronti ed a termine relative allo scadenzario $\{0.5, 1, 1.5\}$.

$$\begin{aligned} i(0,0.5) &= 8.98063\ \% & i(0,0,0.5) &= 8.98063\ \% \\ i(0,1) &= 9.19881\ \% & i(0,0.5,1) &= 9.41743\ \% \\ i(0,1.5) &= 9.45391\ \% & i(0,1,1.5) &= 9.96589\ \% \end{aligned}$$

Esercizio 73

Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui, al tempo $t_0 = 0$ ed in riferimento allo scadenzario $\boldsymbol{t} = \{t_1, t_2, t_3\} = \{0.5, 1, 1.5\}$ anni, siano trattati i seguenti contratti a pronti:
il titolo a cedola nulla $\boldsymbol{x}$, che paga 100 lire in t_1, al prezzo di 95 lire;
il titolo a cedola nulla $\boldsymbol{y}$, che paga 200 lire in t_2, al prezzo di 182 lire;
il titolo a cedola fissa $\boldsymbol{z}$, di capitale nominale 200 lire, tasso nominale annuo del 10 %, cedola semestrale, scadenza in t_3 e prezzo 200.4 lire.
Determinare le strutture per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine implicate dai prezzi dei titoli, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua.

$$\begin{aligned} i(t_0,t_1) &= 10.8033\ \% & i(t_0,t_0,t_1) &= 10.8033\ \% \\ i(t_0,t_2) &= 9.89011\ \% & i(t_0,t_1,t_2) &= 8.98442\ \% \\ i(t_0,t_3) &= 10.0906\ \% & i(t_0,t_2,t_3) &= 10.4927\ \% \end{aligned}$$

Esercizio 74

Si consideri un mercato di titoli obbligazionari in cui sono quotati due titoli: $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{y}/\boldsymbol{s}$, ove

$$\boldsymbol{x} = \{10, 108\} \text{ lire}, \qquad \boldsymbol{y} = \{5, 5\} \text{ lire}, \qquad \boldsymbol{t} = \{0.5, 1\} \text{ anni}, \qquad \boldsymbol{s} = \{1, 1.5\} \text{ anni}.$$

In riferimento ad una struttura per scadenza dei tassi di interesse (su base annua):

$$i(0, 0.5) = 8\% \ , \qquad i(0, 1) = 8.5\% \ , \qquad i(0, 1.5) = 8\% \ ,$$

costruire un portafoglio composto da α_x quote di $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}$ e da α_y quote di $\boldsymbol{y}/\boldsymbol{s}$, in modo tale che il valore attuale del portafoglio sia pari a 100 lire e la durata media finanziaria sia di un anno. Determinare infine la durata media finanziaria di secondo ordine $D^{(2)}$ del portafoglio trovato.

$$\alpha_x = 0.776771 \qquad \alpha_y = 1.677825 \qquad D^{(2)} = 1.037372 \text{ anni}^2$$

Esercizio 75

Sia dato un titolo a cedola fissa $\boldsymbol{x}$, di valore nominale 200 lire, cedola semestrale del 6% nominale annuo e vita a scadenza 40 anni. Si consideri una struttura di valutazione piatta, di intensità istantanea di interesse $\delta = 0.091$ anni^{-1}. Si determini la durata media finanziaria $D(0, \boldsymbol{x})$. Si supponga inoltre che il mercato evolva in condizioni di certezza. Si determini in quale istante $T \in [0, \frac{1}{2})$ anni la durata media finanziaria del titolo $\boldsymbol{x}$ risulterà uguale a 11 anni. Si calcoli inoltre il valore $V(T, \boldsymbol{x})$ che $\boldsymbol{x}$ avrà in T.

$$D(0, \boldsymbol{x}) = 11.3606 \text{ anni} \qquad T = 0.3606 \ \text{ anni} \qquad V(T, \boldsymbol{x}) = 135.12 \ \text{ lire}$$

Esercizio 76

Siano date due rendite $\boldsymbol{r}'$ ed $\boldsymbol{r}''$ di stessa durata, entrambe posticipate e a rata costante pagabile annualmente $R' = 100$ lire e $R'' = 50$ lire, rispettivamente. La rendita $\boldsymbol{r}'$ è immediata, mentre la rendita $\boldsymbol{r}''$ è differita di n anni. Si consideri, al tempo $t = 0$, una struttura di valutazione piatta e, in base a tale struttura, sia $D(0, \boldsymbol{r}') = 9.5$ anni e $D(0, \boldsymbol{r}'') = 11.5$ anni. Determinare l'entità del differimento n della rendita $\boldsymbol{r}''$.

$$n = \qquad 2 \text{ anni}$$

Esercizio 77

Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui, al tempo $t_0 = 0$ ed in riferimento ad uno scadenzario $\{0.5, 1\}$, siano trattati due titoli a cedola nulla a pronti $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ ed il contratto a termine $\boldsymbol{z}$. Si supponga che $\boldsymbol{x}$ paghi 100 lire in t_1, al prezzo di 90 lire, che $\boldsymbol{y}$ paghi 54 lire in t_2 al prezzo di 45 lire e che $\boldsymbol{z}$ paghi 55 lire in t_2 al prezzo, pattuito in t_0 e pagabile in t_1, di 50 lire.

1) Verificare se sono possibili arbitraggi non rischiosi: no × sì non si può dire nulla in merito

2a) Nel caso si abbia risposto "sì alla domanda precedente (e solo in questo caso), costruire un arbitraggio non rischioso che garantisce il profitto certo di 2 lire in t_2, avendo chiuso in pareggio le posizioni negli altri periodi:

azione (A):	× acquisto vendita	di	1 unità del titolo $\boldsymbol{x}$
azione (B):	acquisto × vendita	di	2 unità del titolo $\boldsymbol{y}$
azione (C):	× acquisto vendita	di	2 unità del titolo $\boldsymbol{z}$

2b) Nel caso si abbia risposto "no o "non si può dire nulla in merito" (e solo in questo caso), determinare la struttura per scadenza dei tassi a pronti e a termine implicati dai prezzi dei titoli, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua.

$i(t_0, t_1) =$ $\qquad i(t_0, t_2) =$ $\qquad i(t_0, t_0, t_1) =$ $\qquad i(t_0, t_1, t_2) =$

Esercizio 78

Sia dato un mercato in cui, al tempo $t_0 = 0$ ed in riferimento allo scadenzario $\boldsymbol{t} = \{t_1, t_2, t_3\} = \{1, 2, 3\}$ anni, siano presenti tre titoli obbligazionari $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$. Il titolo $\boldsymbol{x}$ garantisce 5 lire al tempo t_1, 105 lire al tempo t_2 e 0 lire al tempo t_3, al prezzo, contrattato e pagabile in t_0, di 97.5 lire. Il titolo $\boldsymbol{y}$ è a cedola nulla e garantisce 180 lire in t_3, al prezzo, contrattato e pagabile in t_0, di 150 lire. Il titolo $\boldsymbol{z}$ è un contratto che garantisce 70 lire in t_3, al prezzo, pattuito in t_0 e pagabile in t_2, di 66 lire. Indicato con $\boldsymbol{u}$ il portafoglio composto da α quote del titolo $\boldsymbol{x}$, β quote del titolo $\boldsymbol{y}$ e γ quote del titolo $\boldsymbol{z}$, determinare le quote α, β e γ da acquistare in modo tale che l'operazione di acquisto del portafoglio risultante sia equivalente all'operazione finanziaria di acquisto a pronti del flusso $\boldsymbol{u}/\boldsymbol{t} = \{100, 0, 0\}/\boldsymbol{t}$. Determinare infine un prezzo a pronti P per il flusso $\boldsymbol{u}/\boldsymbol{t}$, in modo tale che sul mercato non siano consentiti arbitraggi non rischiosi.

$\alpha =$ 20 $\quad \beta = 12.374 \quad \gamma = 31.8182 \quad P = 93.9394$

Esercizio 79

Sia dato un mercato di titoli obbligazionari in cui, al tempo $t_0 = 0$ ed in riferimento ad uno scadenzario $\{0.5, 1\}$, siano trattati due titoli a cedola nulla a pronti $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ ed il contratto a termine $\boldsymbol{z}$. Si supponga che $\boldsymbol{x}$ paghi 50 lire in t_1, al prezzo di 45 lire, che $\boldsymbol{y}$ paghi 108 lire in t_2 al prezzo di 90 lire e che $\boldsymbol{z}$ paghi 55 lire in t_2 al prezzo, pattuito in t_0 e pagabile in t_1, di 50 lire.

1) Verificare se sono possibili arbitraggi non rischiosi: no $\quad \times$ sì $\quad$ non si può dire nulla in merito

2a) Nel caso si abbia risposto "sì alla domanda precedente (e solo in questo caso), costruire un arbitraggio non rischioso che garantisce il profitto certo di 2 lire in t_2, avendo chiuso in pareggio le posizioni negli altri periodi:

azione (A):	× acquisto / vendita	di	2 unità del titolo $\boldsymbol{x}$
azione (B):	acquisto / × vendita	di	1 unità del titolo $\boldsymbol{y}$
azione (C):	× acquisto / vendita	di	2 unità del titolo $\boldsymbol{z}$

2b) Nel caso si abbia risposto "no o "non si può dire nulla in merito" (e solo in questo caso), determinare la struttura per scadenza dei tassi a pronti e a termine implicati dai prezzi dei titoli, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua.

$i(t_0, t_1) =$ $\quad i(t_0, t_2) =$ $\quad i(t_0, t_0, t_1) =$ $\quad i(t_0, t_1, t_2) =$

Esercizio 80

Sia dato un mercato in cui, al tempo $t_0 = 0$ ed in riferimento allo scadenzario $\boldsymbol{t} = \{t_1, t_2, t_3\} = \{1, 2, 3\}$ anni, siano presenti tre titoli obbligazionari $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$. Il titolo $\boldsymbol{x}$ garantisce 0 lire al tempo t_1, 2 lire al tempo t_2 e 102 lire al tempo t_3, al prezzo, contrattato e pagabile in t_0, di 81.57 lire. Il titolo $\boldsymbol{y}$ è a cedola nulla e garantisce 105 lire in t_1, al prezzo, contrattato e pagabile in t_0, di 97 lire. Il titolo $\boldsymbol{z}$ è un contratto che garantisce 208 lire in t_3, al prezzo, pattuito in t_0 e pagabile in t_1, di 176.2 lire. Indicato con $\boldsymbol{u}$ il portafoglio composto da α quote del titolo $\boldsymbol{x}$, β quote del titolo $\boldsymbol{y}$ e γ quote del titolo $\boldsymbol{z}$, determinare le quote α, β e γ da acquistare in modo tale che l'operazione di acquisto del portafoglio risultante sia equivalente all'operazione finanziaria di acquisto a pronti del flusso $\boldsymbol{u}/\boldsymbol{t} = \{0, 100, 0\}/\boldsymbol{t}$. Determinare infine un prezzo a pronti P per il flusso $\boldsymbol{u}/\boldsymbol{t}$, in modo tale che sul mercato non siano consentiti arbitraggi non rischiosi.

$\alpha =$ 50 $\quad \beta = 41.146 \quad \gamma = 24.519 \quad P = 87.3764$