Esercizi di Matematica Finanziaria

Esercizi preliminati, parte 3

Claudio Pacati
Università degli Studi di Siena
CLAUDIO.PACATI@UNISI.IT

Roberto Renò
Università degli Studi di Verona
ROBERTO.RENO@UNIVR.IT

Versione del 19 settembre 2016

Temi trattati in questa raccolta di esercizi:

- Teoria dell'ultilità
- Decisioni in condizioni di incertezza
- Problemi assicurativi
- Rischio e rendimento
- Modello media-varianza
- Valutazione delle azioni

Esercizio 1

Si consideri un individuo $\mathcal{I}$ dotato di una funzione utilità $u(x) = 150(1 - e^{-x/150})$ e di un capitale certo $c = 450$. Date due operazioni rischiose 1 e 2, caratterizzate da un guadagno aleatorio $G_1 = \{35, -35\}$ e $G_2 = \{90, -42\}$ rispettivamente, si determini quale delle due è preferita se l'individuo massimizza l'utilità attesa e se attribuisce probabilità $7/11$ all'evento $(G_1 = 35)$ e probabilità $5/12$ all'evento $(G_2 = 90)$.

$m_u^{(1)} = 455.635$ $\qquad m_u^{(2)} = 449.925$ $\qquad$ posizione preferita: 1

Esercizio 2

Si considerino due titoli rischiosi con tasso di rendimento aleatorio I_1 e I_2. Supponiamo che il rendimento atteso e la varianza dei due titoli siano rispettivamente $E(I_1) = 0.55$, $E(I_2) = 0.31$, $V(I_1) = 0.021$, $V(I_2) = 0.0033$ e che il coefficiente di correlazione sia pari a 0.65.
Considerando un portafoglio con rendimento $I = \alpha I_1 + (1-\alpha)I_2$, si calcoli la composizione α^* del portafoglio a varianza minima ed i corrispondenti valori di rendimento atteso $E^*(I)$ e di varianza $V^*(I)$,

(a) nel caso in cui siano consentite vendite allo scoperto:

$\alpha^* = -0.15663$ $\qquad E^*(I) = 0.272409$ $\qquad V^*(I) = 0.002969$

(b) nel caso in cui non siano consentite vendite allo scoperto:

$\alpha^* = 0$ $\qquad E^*(I) = 0.31$ $\qquad V^*(I) = 0.0033$

Esercizio 3

Si considerino due titoli rischiosi con tasso di rendimento aleatorio I_1 e I_2. Supponiamo che il rendimento atteso e la varianza dei due titoli siano rispettivamente $E(I_1) = 0.76$, $E(I_2) = 0.23$, $V(I_1) = 0.032$, $V(I_2) = 0.0067$ e che il coefficiente di correlazione sia pari a 0.47.
Considerando un portafoglio con rendimento $I = (1-\alpha)I_1 + \alpha I_2$, si calcoli la composizione α^* del portafoglio a varianza minima ed i corrispondenti valori di rendimento atteso $E^*(I)$ e di varianza $V^*(I)$,

(a) nel caso in cui siano consentite vendite allo scoperto:

$\alpha^* = 1.007296$ $\qquad E^*(I) = 0.226133$ $\qquad V^*(I) = 0.006699$

(b) nel caso in cui non siano consentite vendite allo scoperto:

$\alpha^* = 1$ $\qquad E^*(I) = 0.23$ $\qquad V^*(I) = 0.0067$

Esercizio 4

Un individuo $\mathcal{I}$ dotato di una funzione utilità $u(x) = \log x$ e di un capitale certo $c = 1500$, deve decidere se effettuare una operazione rischiosa con guadagno aleatorio G che può assumere il valore 300 con probabilità $1/5$, il valore 150 con probabilità $2/5$ ed il valore -100 con probabilità $2/5$. Si calcoli l'avversione al rischio (assoluta) $r(c)$ dell'individuo e si determinino l'utilità attesa $E[u(X)]$ e l'equivalente certo m_u della posizione finanziaria $X = c + G$ assunta da $\mathcal{I}$ nell'eventualità che egli effettui l'operazione rischiosa descritta.

$r(c) = \texttt{0.000667}$ $\quad E[u(X)] = \texttt{7.360212}$ $\quad m_u = \texttt{1572.169}$

Esercizio 5

Un individuo $\mathcal{I}$ dotato di una funzione utilità $u(x) = x - \frac{1}{4000}x^2$ e di un capitale certo $c = 1500$, deve decidere se effettuare una operazione rischiosa con guadagno aleatorio G che può assumere il valore 200 con probabilità $1/5$, il valore 50 con probabilità $2/5$ ed il valore -100 con probabilità $2/5$. Si calcoli l'avversione al rischio (assoluta) $r(c)$ dell'individuo e si determinino l'utilità attesa $E[u(X)]$ e l'equivalente certo m_u della posizione finanziaria $X = c + G$ assunta da $\mathcal{I}$ nell'eventualità che egli effettui l'operazione rischiosa descritta.

$r(c) = \texttt{0.002}$ $\quad E[u(X)] = \texttt{939.25}$ $\quad m_u = \texttt{1507.05}$

Esercizio 6

Si considerino due titoli rischiosi con tasso di rendimento aleatorio I_1 e I_2. Supponiamo che il rendimento atteso e la varianza dei due titoli siano rispettivamente $E(I_1) = 0.65$, $E(I_2) = 0.15$, $V(I_1) = 0.042$, $V(I_2) = 0.0053$ e che il coefficiente di correlazione sia pari a 0.47.

Considerando un portafoglio con rendimento $I = (1 - 2\alpha)I_1 + 2\alpha I_2$, si calcoli la composizione α^* del portafoglio a varianza minima ed i corrispondenti valori di rendimento atteso $E^*(I)$ e di varianza $V^*(I)$,

(a) nel caso in cui siano consentite vendite allo scoperto:

$\alpha^* = \texttt{0.525730}$ $\quad E^*(I) = \texttt{0.124271}$ $\quad V^*(I) = \texttt{0.005212}$

(b) nel caso in cui non siano consentite vendite allo scoperto:

$\alpha^* = \texttt{0.5}$ $\quad E^*(I) = \texttt{0.15}$ $\quad V^*(I) = \texttt{0.0053}$

Esercizio 7

Si considerino due titoli rischiosi con tasso di rendimento aleatorio I_1 e I_2. Supponiamo che il rendimento atteso e la varianza dei due titoli siano rispettivamente $E(I_1) = 0.72$, $E(I_2) = 0.21$, $V(I_1) = 0.032$, $V(I_2) = 0.0055$ e che il coefficiente di correlazione sia pari a 0.5 .

Considerando un portafoglio con rendimento $I = 2\lambda I_1 + (1 - 2\lambda)I_2$, si calcoli la composizione λ^* del portafoglio a varianza minima ed i corrispondenti valori di rendimento atteso $E^*(I)$ e di varianza $V^*(I)$,

(a) nel caso in cui siano consentite vendite allo scoperto:

$\lambda^* = \texttt{-0.02338}$ $\quad E^*(I) = \texttt{0.18615}$ $\quad V^*(I) = \texttt{0.005447}$

(b) nel caso in cui non siano consentite vendite allo scoperto:

$\lambda^* = \texttt{0}$ $\quad E^*(I) = \texttt{0.21}$ $\quad V^*(I) = \texttt{0.0055}$

Esercizio 8

Un individuo $\mathcal{I}$, caratterizzato da una funzione di utilità $u(x) = 7\log(x + 1) - 1$ e da un capitale certo $c = 100$, deve scegliere fra due operazioni rischiose G_1 e G_2 con guadagno aleatorio rispettivamente:

$$G_1 = \{15, 5, -15\} \qquad \text{con probabilità } P_1 = \{\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\}$$
$$G_2 = \{35, -35\} \qquad \text{con probabilità } P_2 = \{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\}$$

a) Determinare gli equivalenti certi $m_u^{(1)}$ e $m_u^{(2)}$ delle posizioni finanziarie $X_1 = c + G_1$ e $X_2 = c + G_2$ rispettivamente.

$m_u^{(1)} = \texttt{96.654}$ $\quad m_u^{(2)} = \texttt{93.742}$

b) Determinare l'operazione preferita dall'individuo:

in base al criterio della speranza matematica: 2

in base al criterio dell'utilità attesa: 1

Esercizio 9

Un individuo $\mathcal{I}$, con tolleranza del rischio pari a $B = 40$, è impegnato ad effettuare una operazione finanziaria, che dà un risultato aleatorio X che può assumere i valori 15 e -5 con probabilità $1/4$ e $3/4$ rispettivamente. Si determini il premio puro k di un contratto di assicurazione che garantisce ad $\mathcal{I}$ il valore massimo di X. Supponiamo inoltre che l'individuo proponga il contratto ad un compagnia con tolleranza del rischio $B' = 2000$. Determinare, trascurando le spese ed accettando una approssimazione quadratica per le funzioni utilità, i valori minimo e massimo del coefficiente di caricamento η che rende la polizza accettabile per entrambi.

$k = 15$ $\qquad$ $\eta_{\min} = 0.001250$ $\qquad$ $\eta_{\max} = 0.062500$

Esercizio 10

Un individuo $\mathcal{I}$ dotato di una funzione utilità $u(x) = x - \frac{1}{300}x^2$ e di un capitale certo $c = 100$, deve decidere se effettuare una operazione rischiosa con guadagno aleatorio G che può assumere il valore 25 con probabilità $1/7$, il valore 5 con probabilità $3/7$ ed il valore -10 con probabilità $3/7$. Si calcoli l'avversione al rischio (assoluta) $r(c)$ dell'individuo e si determinino l'utilità attesa $E[u(X)]$ e l'equivalente certo m_u della posizione finanziaria $X = c + G$ assunta da $\mathcal{I}$ nell'eventualità che egli effettui l'operazione rischiosa descritta.

$r(c) = 0.02$ $\qquad$ $E[u(X)] = 66.66667$ $\qquad$ $m_u = 100$

Esercizio 11

Consideriamo un mercato costituito da un certo numero di titoli rischiosi e da un titolo non rischioso N di rendimento $i = 0.10$. Sia P^* il portafoglio, a varianza minima composto da soli titoli rischiosi, caratterizzato da un rendimento atteso $E^* = 0.12$ e da una deviazione standard $\sigma^* = 0.025$. Supponendo che il prezzo di mercato del rischio sia $q = 2$, determinare:

a) il massimo incremento di rendimento atteso ΔE ottenibile con un portafoglio comprendente anche N e che abbia rischiosità non superiore a quella di P^*;

b) il massimo decremento di deviazione standard $\Delta\sigma$ ottenibile con un portafoglio comprendente anche N e che abbia rendimento atteso non inferiore a quello di P^*.

$\Delta E = 0.03$ $\qquad$ $\Delta\sigma = 0.015$

Esercizio 12

Un individuo $\mathcal{I}$, caratterizzato da una funzione di utilità $u(x) = x - \frac{1}{400}x^2$ e da un capitale certo $c = 100$, deve effettuare una scelta fra tre operazioni finanziarie. Le prime due sono operazioni rischiose con guadagno aleatorio rispettivamente:

$$G_1 = \{10, 7, -16\} \qquad \text{con probabilità } P_1 = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right\}$$
$$G_2 = \{40, -35\} \qquad \text{con probabilità } P_2 = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\}$$

mentre la terza è una operazione finanziaria non rischiosa caratterizzata da un guadagno (certo) $G_3 = 2.5$.

a) Determinare gli equivalenti certi $m_u^{(1)}$ e $m_u^{(2)}$ delle posizioni finanziarie $X_1 = c + G_1$, $X_2 = c + G_2$ e $X_3 = c + G_3$, rispettivamente.

$m_u^{(1)} = 102.14$ $\qquad$ $m_u^{(2)} = 95.537$ $\qquad$ $m_u^{(3)} = 102.5$

b) Determinare l'operazione preferita (i) in base al criterio della speranza matematica: 1

(ii) in base al criterio dell'utilità attesa: 3

Esercizio 13

Un individuo $\mathcal{I}$, caratterizzato da una funzione di utilità $u(x) = 7\log(x) + 2$ e da un capitale certo $c = 100$, deve effettuare una scelta fra tre operazioni finanziarie. Le prime due sono operazioni rischiose con guadagno aleatorio rispettivamente:

$$G_1 = \{5, 7, -15\} \qquad \text{con probabilità } P_1 = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right\}$$
$$G_2 = \{20, -15\} \qquad \text{con probabilità } P_2 = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\}$$

mentre la terza è una operazione finanziaria non rischiosa caratterizzata da un guadagno (certo) $G_3 = 2$.

a) Determinare gli equivalenti certi $m_u^{(1)}$ e $m_u^{(2)}$ delle posizioni finanziarie $X_1 = c + G_1$, $X_2 = c + G_2$ e $X_3 = c + G_3$, rispettivamente.

$m_u^{(1)} = 100.068$ $\qquad$ $m_u^{(2)} = 100.995$ $\qquad$ $m_u^{(3)} = 102$

b) Determinare l'operazione preferita (i) in base al criterio della speranza matematica: 2

(ii) in base al criterio dell'utilità attesa: 3

Esercizio 14

Consideriamo un mercato costituito da un certo numero di titoli rischiosi e da un titolo non rischioso N di rendimento $i = 0.105$. Sia P^* il portafoglio, a varianza minima composto da soli titoli rischiosi, caratterizzato da un rendimento atteso $E^* = 0.13$ e da una deviazione standard $\sigma^* = 0.03$. Supponendo che il prezzo di mercato del rischio sia $q = 2.1$, determinare:
a) il massimo incremento di rendimento atteso ΔE ottenibile con un portafoglio comprendente anche N e che abbia rischiosità non superiore a quella di P^*;
b) il massimo decremento di deviazione standard $\Delta\sigma$ ottenibile con un portafoglio comprendente anche N e che abbia rendimento atteso non inferiore a quello di P^*.

$\Delta E = 0.038$ $\qquad\qquad$ $\Delta\sigma = 0.01810$

Esercizio 15

Un individuo $\mathcal{I}$ ha un capitale a rischio X, che può assumere i valori 20 lire e -5 lire, con probabilità $1/4$ e $3/4$ rispettivamente, e vuole stipulare un contratto di assicurazione a copertura integrale del rischio. Supponendo che $\mathcal{I}$ sia disposto a pagare un caricamento sul premio puro non superiore a $\ell^* = 0.75$ lire, determinare, trascurando le spese ed accettando una approssimazione quadratica per le funzioni utilità, quale deve essere la tolleranza del rischio minima B' di una compagnia di assicurazione che accetti il contratto di assicurazione a tale condizione.

$$B' = 78.125$$

Esercizio 16

Consideriamo un mercato con un certo numero di titoli rischiosi ed un titolo non rischioso N di rendimento $i = 0.12$. Sia P^* il portafoglio composto di soli titoli rischiosi avente varianza minima, caratterizzato da una deviazione standard $\sigma^* = 0.03$ e da un rendimento atteso $E^* = 0.15$. Supponiamo che il *portafoglio di mercato* M abbia deviazione standard $\sigma_M = 0.09$ e rendimento atteso $E_M = 0.35$. Determinare le quote percentuali di capitale α_N, α_M da investire rispettivamente nel titolo non rischioso N e nel portafoglio di mercato M, per ottenere un portafoglio P che ha rendimento atteso non inferiore a quello del portafoglio P^* e varianza minima. Calcolare inoltre il decremento di varianza $\Delta\sigma$ ottenuto rispetto a P^*.

$\alpha_M = 0.130435$ $\qquad$ $\alpha_N = 0.869565$ $\qquad$ $\Delta\sigma = 0.018260$

Esercizio 17

Si considerino due titoli rischiosi con tasso di rendimento aleatorio I_1 e I_2. Supponiamo che il rendimento atteso e la varianza dei due titoli siano rispettivamente $E(I_1) = 0.55$, $E(I_2) = 0.25$, $V(I_1) = 0.05$, $V(I_2) = 0.0042$ e che il coefficiente di correlazione sia pari a 0.47.
Considerando un portafoglio con rendimento $I = (1-\alpha)I_1 + \alpha I_2$, si calcoli la composizione α^* del portafoglio a varianza minima ed i corrispondenti valori di rendimento atteso $E^*(I)$ e di varianza $V^*(I)$,

(a) nel caso in cui siano consentite vendite allo scoperto:

$\alpha^* = 1.064344$ $\qquad$ $E^*(I) = 0.230697$ $\qquad$ $V^*(I) = 0.004032$

(b) nel caso in cui non siano consentite vendite allo scoperto:

$\alpha^* = 1$ $\qquad$ $E^*(I) = 0.25$ $\qquad$ $V^*(I) = 0.0042$

Esercizio 18

Un individuo $\mathcal{I}$, caratterizzato da una funzione di utilità $u(x) = 5\log x$ e da un capitale certo $c = 100$, deve effettuare una scelta fra tre operazioni finanziarie. Le prime due sono operazioni rischiose con guadagno aleatorio rispettivamente:

$$G_1 = \{10, 8, -16\} \qquad \text{con probabilità } P_1 = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right\}$$
$$G_2 = \{30, -24.5\} \qquad \text{con probabilità } P_2 = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\}$$

mentre la terza è una operazione finanziaria non rischiosa caratterizzata da un guadagno (certo) $G_3 = 2.5$.

a) Determinare gli equivalenti certi $m_u^{(1)}$ e $m_u^{(2)}$ delle posizioni finanziarie $X_1 = c + G_1$, $X_2 = c + G_2$ e $X_3 = c + G_3$, rispettivamente.

$m_u^{(1)} = 102.358$ $\qquad$ $m_u^{(2)} = 99.0707$ $\qquad$ $m_u^{(3)} = 102.5$

b) Determinare l'operazione preferita (i) in base al criterio della speranza matematica: 1
(ii) in base al criterio dell'utilità attesa: 3

Esercizio 19

Un individuo $\mathcal{I}$ dotato di una funzione utilità $u(x) = 200\left(1 - e^{-\frac{1}{200}x}\right)$ e di un capitale certo $c = 100$, deve decidere se effettuare una operazione rischiosa con guadagno aleatorio G che può assumere il valore 30 con probabilità 1/7, il valore 5 con probabilità 3/7 ed il valore -20 con probabilità 3/7. Si calcoli la tolleranza del rischio $B(c)$ dell'individuo e si determinino l'utilità attesa $E[u(X)]$ e l'equivalente certo m_u della posizione finanziaria $X = c + G$ assunta da $\mathcal{I}$ nell'eventualità che egli effettui l'operazione rischiosa descritta.

$B(c) = 200$ $\qquad$ $E[u(X)] = 76.92366$ $\qquad$ $m_u = 97.10251$

Esercizio 20

Un individuo $\mathcal{I}$ ha un capitale a rischio X , che può assumere i valori 30 lire e -8 lire, con probabilità 3/10 e 7/10 rispettivamente, e vuole stipulare un contratto di assicurazione a copertura integrale del rischio. Determinare il premio puro di tale contratto. Supponendo inoltre che una compagnia di assicurazione proponga all'individuo una polizza con un coefficiente di caricamento $\eta = 25\%$, determinare il premio caricato π e, trascurando le spese ed accettando una approssimazione quadratica per le funzioni di utilità, quale deve essere la tolleranza del rischio massima B dell'individuo $\mathcal{I}$, affinché egli accetti il contratto di assicurazione a tale condizione.

$k = 26.6$ $\qquad$ $\pi = 33.25$ $\qquad$ $B = 22.8$

Esercizio 21

Consideriamo un mercato costituito da un certo numero di titoli rischiosi e da un titolo non rischioso N di rendimento $i = 0.08$. Sia P^* il portafoglio a varianza minima composto da soli titoli rischiosi, caratterizzato da un rendimento atteso $E^* = 0.10$ e da una deviazione standard $\sigma^* = 0.02$. Supponendo che il prezzo di mercato del rischio sia $q = 1.5$, determinare:
a) il massimo incremento di rendimento atteso ΔE ottenibile con un portafoglio comprendente anche N e che abbia rischiosità non superiore a quella di P^*;
b) il massimo decremento di deviazione standard $\Delta\sigma$ ottenibile con un portafoglio comprendente anche N e che abbia rendimento atteso non inferiore a quello di P^*.

$\Delta E = 0.01$ $\qquad$ $\Delta\sigma = 0.00667$

Esercizio 22

Un individuo $\mathcal{I}$, con tolleranza del rischio pari a $B = 35$, è impegnato ad effettuare una operazione finanziaria, che dà un risultato aleatorio X che può assumere i valori 20 e -5 con probabilità 1/5 e 4/5 rispettivamente. Si determini il premio puro k di un contratto di assicurazione che garantisce ad $\mathcal{I}$ il valore massimo di X. Supponiamo inoltre che l'individuo proponga il contratto ad un compagnia con tolleranza del rischio $B' = 4000$. Determinare, trascurando le spese ed accettando una approssimazione quadratica per le funzioni utilità, i valori minimo e massimo del coefficiente di caricamento η che rende la polizza accettabile per entrambi.

$k = 20$ $\qquad$ $\eta_{\min} = 0.000625$ $\qquad$ $\eta_{\max} = 0.071429$

Esercizio 23

Un individuo $\mathcal{I}$, con tolleranza del rischio pari a $B = 35$, è impegnato ad effettuare una operazione finanziaria, che dà un risultato aleatorio X che può assumere i valori 10 e -5 con probabilità 2/5 e 3/5 rispettivamente. Si determini il premio puro k di un contratto di assicurazione che garantisce ad $\mathcal{I}$ il valore massimo di X. Supponiamo inoltre che l'individuo proponga il contratto ad un compagnia con tolleranza del rischio $B' = 4000$. Ipotizzando che le spese s siano pari al 5% del premio puro, determinare, accettando una approssimazione quadratica per le funzioni di utilità, i valori minimo e massimo del premio caricato π che rende la polizza accettabile per entrambi.

$k = 9$ $\qquad$ $\pi_{\min} = 9.45675$ $\qquad$ $\pi_{\max} = 9.771429$

Esercizio 24

Si consideri un mercato con due titoli rischiosi T_1 e T_2, con tassi di rendimento aleatori I_1 e I_2, rispettivamente. Si supponga che il rendimento atteso e la varianza dei due titoli siano rispettivamente $E(I_1) = 0.9$, $E(I_2) = 0.5$, $V(I_1) = 0.06$, $V(I_2) = 0.003$ e che il coefficiente di correlazione sia pari a 0.15.
Considerando un portafoglio composto da x quote di T_1 e da $1 - x$ quote di T_2, si calcoli la composizione x^* del portafoglio a varianza minima ed i corrispondenti valori di rendimento atteso E^* e di varianza V^*, nell'ipotesi in cui non siano consentite vendite allo scoperto.

$x^* = 0.016745$ $\qquad$ $E^* = 0.506698$ $\qquad$ $V^* = 0.002983$

Esercizio 25

Un individuo $\mathcal{I}$, caratterizzato da una funzione di utilità $u(x)$ e da un capitale certo $c = 100$ lire, deve valutare una operazione finanziaria di guadagno aleatorio G. Sapendo che l'equivalente certo della posizione finanziaria $X = c + G$ percepito dall'individuo è $m_u = 102$ lire, determinare l'avversione al rischio $r(c)$ e l'utilità attesa della posizione X nell'ipotesi che:

(a) la funzione di utilità di $\mathcal{I}$ sia $u(x) = 10\log(x+1)$:

$$r(c) = \texttt{0.01} \qquad E[u(x)] = \texttt{46.35}$$

(b) la funzione di utilità di $\mathcal{I}$ sia $u(x) = 500\left(1 - e^{-x/500}\right)$:

$$r(c) = \texttt{0.002} \qquad E[u(x)] = \texttt{92.27}$$

(c) la funzione di utilità di $\mathcal{I}$ sia $u(x) = x - \frac{1}{400}x^2$:

$$r(c) = \texttt{0.01} \qquad E[u(x)] = \texttt{75.99}$$

Esercizio 26

Un individuo $\mathcal{I}$, caratterizzato da una funzione di utilità $u(x)$ e da un capitale certo $c = 100$ lire, deve valutare una operazione finanziaria di guadagno aleatorio G. Sapendo che l'equivalente certo della posizione finanziaria $X = c + G$ percepito dall'individuo è $m_u = 102$ lire, determinare l'avversione al rischio $r(c)$ e l'utilità attesa della posizione X nell'ipotesi che:

(a) la funzione di utilità di $\mathcal{I}$ sia $u(x) = 8\log(x+1)$:

$$r(c) = \texttt{0.009901} \qquad E[u(x)] = \texttt{37.0778}$$

(b) la funzione di utilità di $\mathcal{I}$ sia $u(x) = 600\left(1 - e^{-x/600}\right)$:

$$r(c) = \texttt{0.001667} \qquad E[u(x)] = \texttt{93.8011}$$

(c) la funzione di utilità di $\mathcal{I}$ sia $u(x) = x - \frac{1}{500}x^2$:

$$r(c) = \texttt{0.006667} \qquad E[u(x)] = \texttt{81.192}$$

Esercizio 27

Un individuo $\mathcal{I}$, caratterizzato da una funzione di utilità $u(x) = 8\log(x+1) + 1$ e da un capitale certo $c = 100$, deve effettuare una scelta fra le seguenti due operazioni finanziarie che prevedono un guadagno (aleatorio):

$$\begin{array}{ll} G_1 = \{65, 10, -40\} & \text{con probabilità } P_1 = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\} \\ G_2 = \{10, -10\} & \text{con probabilità } P_2 = \left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\} \end{array}$$

a) Determinare l'avversione al rischio $r(c)$ percepita dall'individuo e gli equivalenti certi $m_u^{(1)}$ e $m_u^{(2)}$ delle posizioni finanziarie $X_1 = c + G_1$, $X_2 = c + G_2$, rispettivamente.

$$r(c) = \texttt{0.009901} \qquad m_u^{(1)} = \texttt{89.9961} \qquad m_u^{(2)} = \texttt{97.5267}$$

b) Determinare l'operazione preferita (i) in base al criterio della speranza matematica: 1

(ii) in base al criterio dell'utilità attesa: 2

Esercizio 28

Un individuo $\mathcal{I}$ è impegnato ad effettuare una operazione finanziaria, che dà un risultato aleatorio X che può assumere i valori 100 e -25 con probabilità $1/4$ e $3/4$ rispettivamente. Si determini il premio puro k di un contratto di assicurazione che garantisca ad $\mathcal{I}$ il valore massimo di X.

Supponiamo inoltre che l'individuo proponga il contratto ad un compagnia con tolleranza del rischio $B' = 10000$. Supponendo accettabile una approssimazione quadratica per le funzioni di utilità, calcolare:

a) nell'ipotesi che le spese della compagnia s siano di 1 lira, il premio minimo accettabile π^* da parte della compagnia;

b) nell'ipotesi che la compagnia proponga il contratto con caricamento sul premio puro $\ell = 2.25$ lire, il valore massimo B^* della tolleranza del rischio di $\mathcal{I}$ affinché egli sottoscriva la polizza.

$$k = \texttt{93.75} \qquad \pi^* = \texttt{94.8965} \qquad B^* = \texttt{651.042}$$

Esercizio 29

Un individuo $\mathcal{I}$ è impegnato ad effettuare una operazione finanziaria, che dà un risultato aleatorio X che può assumere i valori 80 e -20 con probabilità $1/4$ e $3/4$ rispettivamente. Si determini il premio puro k di un contratto di assicurazione che garantisca ad $\mathcal{I}$ il valore massimo di X.
Supponiamo inoltre che l'individuo proponga il contratto ad un compagnia con tolleranza del rischio $B' = 10000$. Supponendo accettabile una approssimazione quadratica per le funzioni di utilità, calcolare:
a) nell'ipotesi che le spese della compagnia s siano di 1 lira, il caricamento minimo accettabile ℓ^* da parte della compagnia;
b) nell'ipotesi che la compagnia proponga il contratto con premio $\pi = 77$ lire, il valore massimo B^* della tolleranza del rischio di $\mathcal{I}$ affinché egli sottoscriva la polizza.

$$k = 75 \qquad \ell^* = 1.09375 \qquad B^* = 468.75$$

Esercizio 30

Un individuo $\mathcal{I}$, caratterizzato da una funzione di utilità $u(x) = 400\big(1 - \exp(-x/200)\big)$ e da un capitale certo $c = 100$, deve effettuare una scelta fra le seguenti due operazioni finanziarie che prevedono un guadagno (aleatorio):

$$G_1 = \{15, -5\} \qquad \text{con probabilità } P_1 = \left\{\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}\right\}$$
$$G_2 = \{45, 10, -25\} \qquad \text{con probabilità } P_2 = \left\{\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right\}$$

a) Determinare l'avversione al rischio $r(c)$ percepita dall'individuo e gli equivalenti certi $m_u^{(1)}$ e $m_u^{(2)}$ delle posizioni finanziarie $X_1 = c + G_1$, $X_2 = c + G_2$, rispettivamente.

$$r(c) = 0.005 \qquad m_u^{(1)} = 99.8156 \qquad m_u^{(2)} = 99.1995$$

b) Determinare l'operazione preferita (i) in base al criterio della speranza matematica: 2
(ii) in base al criterio dell'utilità attesa: 1

Esercizio 31

Un individuo $\mathcal{I}$, caratterizzato da una funzione di utilità $u(x) = 7\log(x/2) + 2$ e da un capitale certo $c = 100$, deve effettuare una scelta fra tre operazioni finanziarie. Le prime due sono operazioni rischiose con guadagno aleatorio:

$$G_1 = \{60, 40, -40\} \qquad \text{con probabilità } P_1 = \left\{\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right\}$$
$$G_2 = \{50, -50\} \qquad \text{con probabilità } P_2 = \left\{\tfrac{3}{5}, \tfrac{2}{5}\right\}$$

mentre la terza è caratterizzata da un guadagno certo $G_3 = 2.5$.
a) Determinare l'avversione al rischio $r(c)$ percepita dall'individuo e gli equivalenti certi $m_u^{(1)}$, $m_u^{(2)}$ e $m_u^{(3)}$ delle posizioni finanziarie $X_1 = c + G_1$, $X_2 = c + G_2$ e $X_3 = c + G_3$, rispettivamente.

$$r(c) = 0.01$$

$$m_u^{(1)} = 94.7627 \qquad m_u^{(2)} = 96.6591 \qquad m_u^{(3)} = 102.5$$

b) Determinare l'operazione preferita (i) in base al criterio della speranza matematica: 2
(ii) in base al criterio dell'utilità attesa: 3

Esercizio 32

Consideriamo un mercato costituito da un certo numero di titoli rischiosi e da un titolo non rischioso N di rendimento $i = 0.06$. Sia P^* il portafoglio a varianza minima composto da soli titoli rischiosi, caratterizzato da un rendimento atteso $E^* = 0.10$ e da una deviazione standard $\sigma^* = 0.03$. Supponendo che il prezzo di mercato del rischio sia $q = 2$, determinare:
a) il massimo incremento di rendimento atteso ΔE ottenibile con un portafoglio comprendente anche N e che abbia rischiosità non superiore a quella di P^*;
b) il massimo decremento di deviazione standard $\Delta\sigma$ ottenibile con un portafoglio comprendente anche N e che abbia rendimento atteso non inferiore a quello di P^*.

$$\Delta E = 0.02 \qquad \Delta\sigma = 0.01$$

Esercizio 33

Un individuo $\mathcal{I}$, caratterizzato da una funzione di utilità $u(x) = 500(2 - e^{-x/500})$ e da un capitale certo $c = 100$, deve effettuare una scelta fra tre operazioni finanziarie. Le prime due sono operazioni rischiose con guadagno aleatorio:

$$G_1 = \{20, -5\} \qquad \text{con probabilità} \quad P_1 = \left\{\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}\right\}$$
$$G_2 = \{50, 10, -25\} \qquad \text{con probabilità} \quad P_2 = \left\{\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right\}$$

mentre la terza è caratterizzata da un guadagno certo $G_3 = 2$.

a) Determinare l'avversione al rischio $r(c)$ percepita dall'individuo e gli equivalenti certi $m_u^{(1)}$, $m_u^{(2)}$ e $m_u^{(3)}$ delle posizioni finanziarie $X_1 = c + G_1$, $X_2 = c + G_2$ e $X_3 = c + G_3$, rispettivamente.

$$r(c) = 0.002$$

$$m_u^{(1)} = 101.134 \qquad m_u^{(2)} = 101.555 \qquad m_u^{(3)} = 102$$

b) Determinare l'operazione preferita (i) in base al criterio della speranza matematica: 2
(ii) in base al criterio dell'utilità attesa: 3

Esercizio 34

Consideriamo un mercato costituito da un certo numero di titoli rischiosi e da un titolo non rischioso N di rendimento $i = 0.05$. Sia P^* il portafoglio a varianza minima composto da soli titoli rischiosi, caratterizzato da un rendimento atteso $E^* = 0.12$ e da una deviazione standard $\sigma^* = 0.04$. Supponendo che il prezzo di mercato del rischio sia $q = 2.5$, determinare:
a) il massimo incremento di rendimento atteso ΔE ottenibile con un portafoglio comprendente anche N e che abbia rischiosità non superiore a quella di P^*;
b) il massimo decremento di deviazione standard $\Delta\sigma$ ottenibile con un portafoglio comprendente anche N e che abbia rendimento atteso non inferiore a quello di P^*.

$$\Delta E = 0.03 \qquad \Delta\sigma = 0.012$$

Esercizio 35

Un individuo $\mathcal{I}$, caratterizzato da una funzione di utilità $u(x) = 10 + x - (1/1000)x^2$ e da un capitale certo $c = 100$, deve effettuare una scelta fra tre operazioni finanziarie. Le prime due sono operazioni rischiose con guadagno aleatorio:

$$G_1 = \{15, -5\} \qquad \text{con probabilità} \quad P_1 = \left\{\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}\right\}$$
$$G_2 = \{45, 10, -25\} \qquad \text{con probabilità} \quad P_2 = \left\{\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right\}$$

mentre la terza è caratterizzata da un guadagno certo $G_3 = 2$.

a) Determinare l'avversione al rischio $r(c)$ percepita dall'individuo e gli equivalenti certi $m_u^{(1)}$, $m_u^{(2)}$ e $m_u^{(3)}$ delle posizioni finanziarie $X_1 = c + G_1$, $X_2 = c + G_2$ e $X_3 = c + G_3$, rispettivamente.

$$r(c) = 0.0025$$

$$m_u^{(1)} = 99.9063 \qquad m_u^{(2)} = 100.195 \qquad m_u^{(3)} = 102$$

b) Determinare l'operazione preferita (i) in base al criterio della speranza matematica: 3
(ii) in base al criterio dell'utilità attesa: 3

Esercizio 36

Consideriamo un mercato costituito da un certo numero di titoli rischiosi e da un titolo non rischioso N di rendimento $i = 0.07$. Sia P^* il portafoglio a varianza minima composto da soli titoli rischiosi, caratterizzato da un rendimento atteso $E^* = 0.09$ e da una deviazione standard $\sigma^* = 0.01$. Supponendo che il prezzo di mercato del rischio sia $q = 3$, determinare:
a) il massimo incremento di rendimento atteso ΔE ottenibile con un portafoglio comprendente anche N e che abbia rischiosità non superiore a quella di P^*;
b) il massimo decremento di deviazione standard $\Delta\sigma$ ottenibile con un portafoglio comprendente anche N e che abbia rendimento atteso non inferiore a quello di P^*.

$$\Delta E = 0.01 \qquad \Delta\sigma = 0.00333$$

Esercizio 37

Un individuo $\mathcal{I}$, caratterizzato da un capitale certo $c = 150$ lire e da una funzione di utilità $u(x) = \log x$, è impegnato in un'operazione rischiosa di guadagno aleatorio G, che può assumere i valori 25, 15 e 0 lire, con probabilità rispettivamente $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$. Calcolare il premio puro k di un contratto assicurativo che garantisca ad $\mathcal{I}$ il valore massimo di G.
Se l'individuo propone il contratto ad una compagnia con tolleranza del rischio $B'(c) = 20000$, calcolare, accettando l'approssimazione quadratica delle funzioni di utilità ed in presenza di spese pari a $s = 0.2$ lire, i valori minimo e massimo del coefficiente di caricamento η che rende il contratto accettabile per entrambi, esprimendo i coefficienti in forma percentuale.

$k = 13.33$ $\qquad$ $\eta_{\min} = 1.5151$ % $\qquad$ $\eta_{\max} = 2.0138$ %

Esercizio 38

Consideriamo un mercato con un certo numero di titoli rischiosi ed un titolo non rischioso N di rendimento $i = 0.06$. Sia P^* il portafoglio composto di soli titoli rischiosi avente varianza minima e sia caratterizzato da una deviazione standard $\sigma^* = 0.03$ e da un rendimento atteso $E^* = 0.11$. Supponiamo inoltre che il *portafoglio di mercato* M abbia deviazione standard $\sigma_M = 0.07$ e rendimento atteso $E_M = 0.2$. Determinare le quote percentuali di capitale α_N, α_M da investire rispettivamente nel titolo non rischioso N e nel portafoglio di mercato M, per ottenere un portafoglio P che, tra tutti i portafogli che hanno deviazione standard non superiore a σ^*, realizza il massimo rendimento atteso. Indicare inoltre l'incremento di rendimento atteso ΔE ottenuto rispetto a quello di P^*.

$\alpha_M = 42.86$ % $\qquad$ $\alpha_N = 57.14$ % $\qquad$ $\Delta E = 0.01$

Esercizio 39

Un individuo $\mathcal{I}$, caratterizzato da un capitale certo $c = 200$ lire e da una tolleranza del rischio $B(c) = 300$, deve decidere se effettuare un'operazione finanziaria rischiosa di guadagno aleatorio G, che può assumere i valori 15, 10 e -5 lire, con probabilità rispettivamente $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{5}$. Accettando l'approssimazione quadratica delle funzioni di utilità e trascurando eventuali spese, calcolare l'equivalente certo della posizione finanziaria di $\mathcal{I}$ in ognuno dei seguenti casi:

(a) $\mathcal{I}$ effettua l'operazione finanziaria rischiosa: $m_u^{(1)} = 201.8733$

(b) $\mathcal{I}$ effettua l'operazione finanziaria rischiosa e sottoscrive una polizza assicurativa che gli garantisce il valore massimo di G, con il caricamento sul premio puro fissato al livello massimo accettabile: $m_u^{(2)} = 201.8733$

(c) $\mathcal{I}$ effettua l'operazione finanziaria rischiosa e sottoscrive una polizza assicurativa che gli garantisce il valore massimo di G, con il caricamento sul premio puro fissato al livello minimo accettabile da una compagnia con tolleranza del rischio $B' = 10000$: $m_u^{(3)} = 201.9962$

Esercizio 40

Un individuo $\mathcal{I}$, caratterizzato da una funzione di utilità $u(x) = 8 \log x$ e da un capitale certo $c = 100$, deve effettuare una scelta fra tre operazioni finanziarie. Le prime due sono operazioni rischiose con guadagno aleatorio rispettivamente:

$$G_1 = \{31, -25\} \qquad \text{con probabilità } P_1 = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\}$$
$$G_2 = \{10, 5, -15\} \qquad \text{con probabilità } P_2 = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}\right\}$$

mentre la terza è una operazione finanziaria non rischiosa caratterizzata da un guadagno (certo) $G_3 = 1.5$.

a) Determinare gli equivalenti certi $m_u^{(1)}$, $m_u^{(2)}$ e $m_u^{(3)}$ delle posizioni finanziarie $X_1 = c+G_1$, $X_2 = c+G_2$ e $X_3 = c+G_3$, rispettivamente.

$m_u^{(1)} = 99.1211$ $\qquad$ $m_u^{(2)} = 101.941$ $\qquad$ $m_u^{(3)} = 101.5$

b) Determinare l'operazione preferita (i) in base al criterio della speranza matematica: 1
(ii) in base al criterio dell'utilità attesa: 2

Esercizio 41

Consideriamo un mercato con un certo numero di titoli rischiosi ed un titolo non rischioso N di rendimento $i = 6\%$. Supponiamo che il *portafoglio di mercato* M abbia deviazione standard $\sigma_M = 0.07$ e rendimento atteso $E_M = 20\%$. Un investitore vuole costruire un portafoglio efficiente P che abbia rendimento atteso pari al 10%. Determinare la composizione percentuale α_M di attività rischiose di tale portafoglio e calcolarne la rischiosità σ_P.

$\alpha_M = 28.57$ % $\qquad$ $\sigma_P = 0.02$

Esercizio 42

Un individuo $\mathcal{I}$ ha un capitale a rischio X , che può assumere i valori -3 lire e 12 lire, con probabilità 6/10 e 4/10 rispettivamente, e vuole stipulare un contratto di assicurazione a copertura integrale del rischio. Determinare il premio puro di tale contratto. Supponendo inoltre che una compagnia di assicurazione proponga all'individuo una polizza con un coefficiente di caricamento $\eta = 5\%$, determinare il premio caricato π e, trascurando le spese ed accettando una approssimazione quadratica per le funzioni di utilità, quale deve essere la tolleranza del rischio massima B dell'individuo $\mathcal{I}$, affinché egli accetti il contratto di assicurazione a tale condizione.

$$k = 9 \qquad \pi = 9.45 \qquad B = 60$$

Esercizio 43

Consideriamo un mercato con un certo numero di titoli rischiosi ed un titolo non rischioso N di rendimento $i = 0.06$. Sia P^* il portafoglio composto di soli titoli rischiosi avente varianza minima e sia caratterizzato da una deviazione standard $\sigma^* = 0.03$ e da un rendimento atteso $E^* = 0.11$. Supponiamo inoltre che il *portafoglio di mercato* M abbia deviazione standard $\sigma_M = 0.07$ e rendimento atteso $E_M = 0.2$. Determinare le quote percentuali di capitale α_N, α_M da investire rispettivamente nel titolo non rischioso N e nel portafoglio di mercato M, per ottenere un portafoglio P che, tra tutti i portafogli che hanno rendimento atteso non inferiore ad E^*, ha la minima rischiosità (deviazione standard). Indicare inoltre il decremento di rischiosità $\Delta\sigma$ ottenuto rispetto a quella di P^*.

$$\alpha_M = 35.71\ \% \qquad \alpha_N = 64.29\ \% \qquad \Delta\sigma = 0.005$$

Esercizio 44

Si consideri un mercato con due titoli rischiosi X_1 ed X_2, di rendimento aleatorio I_1 e I_2 rispettivamente. Supponiamo che il rendimento atteso e la varianza dei due titoli siano $E(I_1) = 0.5$, $V(I_1) = 0.05$, $E(I_2) = 0.25$, $V(I_2) = 0.005$ e che il coefficiente di correlazione sia pari a 0.2.

Si supponga di volere costruire un portafoglio X dei due titoli, in modo che la varianza sia la minima possibile. Detto I il tasso di rendimento di X, calcolarne la quota di composizione percentuale α_1 relativa a X_1 e la quota di composizione percentuale α_2 relativa a X_2, determinando anche il rendimento atteso $E(I)$ e la varianza $V(I)$ del portafoglio ottenuto.

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 3.775\ \% \\ \alpha_2 &= 96.22\ \%\end{aligned} \qquad E(I) = 0.259439 \qquad V(I) = 0.004931$$

Esercizio 45

Un individuo $\mathcal{I}$, con tolleranza del rischio pari a $B = 35$, è impegnato ad effettuare una operazione finanziaria, che dà un risultato aleatorio di X lire. Si supponga che X sia normalmente distribuita, con media $E(X) = 0$ lire, varianza $V(X) = 100$ e valore massimo $x_{\max} = 20$ lire. Si determini il premio puro k di un contratto di assicurazione che garantisce ad $\mathcal{I}$ il valore massimo di X. Supponiamo inoltre che l'individuo proponga il contratto ad un compagnia con tolleranza del rischio $B' = 2400$. Determinare, accettando l'approssimazione quadratica per le funzioni utilità ed in presenza di spese pari a $s = 0.5$ lire, i valori minimo e massimo del coefficiente di caricamento η che rende la polizza accettabile per entrambi.

$$k = 20 \qquad \eta_{\min} = 0.026042 \qquad \eta_{\max} = 0.071429$$

Esercizio 46

Un individuo $\mathcal{I}$, caratterizzato da una funzione di utilità $u(x) = x^{1/4}$ e da un capitale certo $c = 100$, deve effettuare una scelta fra tre operazioni finanziarie. Le prime due sono operazioni rischiose con guadagno aleatorio:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{25, -5\} \qquad \text{con probabilità } P_1 = \left\{\tfrac{3}{10}, \tfrac{7}{10}\right\} \\ G_2 &= \{60, -30\} \qquad \text{con probabilità } P_2 = \left\{\tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}\right\} \end{aligned}$$

mentre la terza è caratterizzata da un guadagno certo $G_3 = 3$.

a) Determinare l'avversione al rischio $r(c)$ percepita dall'individuo e gli equivalenti certi $m_u^{(1)}$, $m_u^{(2)}$ e $m_u^{(3)}$ delle posizioni finanziarie $X_1 = c + G_1$, $X_2 = c + G_2$ e $X_3 = c + G_3$, rispettivamente.

$$r(c) = 0.0075$$

$$m_u^{(1)} = 103.358 \qquad m_u^{(2)} = 99.4761 \qquad m_u^{(3)} = 103$$

b) Determinare l'operazione preferita (i) in base al criterio della speranza matematica: 2

(ii) in base al criterio dell'utilità attesa: 1

Esercizio 47

Consideriamo un mercato con un certo numero di titoli rischiosi ed un titolo non rischioso N di rendimento $i = 12\%$. Supponiamo che il *portafoglio di mercato* M abbia deviazione standard $\sigma_M = 0.09$ e rendimento atteso $E_M = 17\%$. Un investitore vuole costruire un portafoglio efficiente P che abbia deviazione standard pari a 0.06. Determinare la composizione percentuale α_M di attività rischiose di tale portafoglio e calcolarne il rendimento atteso E_P.

$$\alpha_M = \texttt{66.67}\ \% \qquad\qquad E_P = \texttt{15.33}\ \%$$

Esercizio 48

Si consideri un individuo $\mathcal{I}$, dotato un capitale certo $c = 100$ lire, che deve scegliere fra due operazioni finanziarie rischiose caratterizzate da un guadagno aleatorio G_1 e G_2 rispettivamente, ove

$$G_1 = \{10, -9\}, \qquad \text{con probabilità} \qquad \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\};$$

$$G_2 = \{51, -16\}, \qquad \text{con probabilità} \qquad \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}.$$

Sapendo che $\mathcal{I}$ è dotato di una funzione di utilità del tipo

$$u(x) = x - \frac{a}{2}x^2 \qquad\qquad \text{con } a > 0$$

e che percepisce una tolleranza del rischio relativa alla posizione iniziale $B(c) = 500$, determinare gli equivalenti certi $m_u^{(1)}$ ed $m_u^{(2)}$ delle due posizioni $X_1 = c + G_1$ e $X_2 = c + G_2$, rispettivamente,

$$m_u^{(1)} = \texttt{100.41} \qquad\qquad m_u^{(2)} = \texttt{99.9078}$$

e scegliere l'operazione preferita

a) in base al criterio della speranza matematica: 2

b) in base al criterio dell'utilità attesa: 1

Esercizio 49

Consideriamo un individuo $\mathcal{I}$ munito di un capitale certo c lire e di un capitale a rischio X, che può assumere i valori 10 o 5 lire. Supponendo che $\mathcal{I}$ attribuisce probabilità 1/3 all'evento $(X = 10)$, determinare il premio puro di un contratto di assicurazione che garantisce ad $\mathcal{I}$ il valore massimo di X. Accettando inoltre l'approssimazione quadratica della funzione di utilità dell'individuo, determinare la sua avversione al rischio $r(c)$, nell'ipotesi che egli giudichi indifferente pagare il premio $\pi = 3.334$ lire per stipulare la polizza. Determinare infine la rischiosità della situazione finanziaria $c + X$ percepita dall'individuo.

$$k = \texttt{3.333333} \qquad\qquad r(c) = \texttt{0.00024} \qquad\qquad \Phi_c(X) = \texttt{0.000667}$$

Esercizio 50

Si consideri un individuo $\mathcal{I}$, dotato un capitale certo $c = 100$ lire, che deve scegliere fra due operazioni finanziarie rischiose caratterizzate da un guadagno aleatorio G_1 e G_2 rispettivamente, ove

$$G_1 = \{52, -50\}, \qquad \text{con probabilità} \qquad \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\};$$

$$G_2 = \{33, -10\}, \qquad \text{con probabilità} \qquad \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}.$$

Sapendo che $\mathcal{I}$ è dotato di una funzione di utilità del tipo

$$u(x) = a\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{a}x}\right) \qquad\qquad \text{con } a > 0$$

e che percepisce una tolleranza del rischio relativa alla posizione iniziale $B(c) = 300$, determinare gli equivalenti certi $m_u^{(1)}$ ed $m_u^{(2)}$ delle due posizioni $X_1 = c + G_1$ e $X_2 = c + G_2$, rispettivamente,

$$m_u^{(1)} = \texttt{96.6857} \qquad\qquad m_u^{(2)} = \texttt{100.186}$$

e scegliere l'operazione preferita

a) in base al criterio della speranza matematica: 1

b) in base al criterio dell'utilità attesa: 2

Esercizio 51

Consideriamo un individuo $\mathcal{I}$ munito di un capitale certo c lire e di un capitale a rischio X, che può assumere i valori 5 o 2 lire. Supponendo che $\mathcal{I}$ attribuisce probabilità $1/4$ all'evento $(X = 5)$, determinare il premio puro di un contratto di assicurazione che garantisce ad $\mathcal{I}$ il valore massimo di X. Accettando inoltre l'approssimazione quadratica della funzione di utilità dell'individuo, determinare la sua avversione al rischio $r(c)$, nell'ipotesi che egli giudichi indifferente pagare il premio $\pi = 2.2505$ lire per stipulare la polizza. Determinare infine la rischiosità della situazione finanziaria $c + X$ percepita dall'individuo.

$k = 2.25$ $\qquad$ $r(c) = 0.000593$ $\qquad$ $\Phi_c(X) = 0.0005$

Esercizio 52

Si consideri un individuo $\mathcal{I}$, caratterizzato da una tolleranza del rischio $B = 500$, al quale viene proposto di partecipare ad una scommessa, consistente nel lancio di una moneta (una sola volta): se esce TESTA l'individuo vince la somma che ha puntato moltiplicata per 1.01; se invece esce CROCE, l'individuo perde la somma che ha puntato. Accettando l'approssimazione quadratica della funzione di utilità di $\mathcal{I}$ e supponendo che gli importi in gioco siano piccoli rispetto a B, calcolare la rischiosità Φ percepita dall'individuo nel caso di una puntata di $y = 5$ lire e dire se $\mathcal{I}$ accetta di puntare tale somma. Determinare infine la somma massima y^* che egli è disposto a scommettere.

$\Phi = 0.025251$ $\qquad$ accetta di puntare y lire: $\begin{cases} \quad \text{sì} \\ \times \ \text{no} \end{cases}$ $\qquad$ $y^* = 4.950373$

Esercizio 53

Si consideri un individuo $\mathcal{I}$, dotato un capitale certo $c = 100$ lire, che deve scegliere fra due operazioni finanziarie rischiose caratterizzate da un guadagno aleatorio G_1 e G_2 rispettivamente, ove

$$G_1 = \{10, -9\}, \text{ con probabilità } \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}; \qquad G_2 = \{51, -16\}, \text{ con probabilità } \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}.$$

Sapendo che $\mathcal{I}$ è dotato di una funzione di utilità del tipo $u(x) = x^\alpha$, con $0 < \alpha < 1$, e che percepisce una tolleranza del rischio relativa alla posizione iniziale $B(c) = 200$, determinare gli equivalenti certi $m_u^{(1)}$ ed $m_u^{(2)}$ delle due posizioni $X_1 = c + G_1$ e $X_2 = c + G_2$, rispettivamente,

$m_u^{(1)} = 100.275$ $\qquad$ $m_u^{(2)} = 98.9212$

e scegliere l'operazione preferita

a) in base al criterio della speranza matematica: 2

b) in base al criterio dell'utilità attesa: 1

Esercizio 54

Un individuo $\mathcal{I}$ è dotato di una funzione di utilità $u(x) = 2\log\frac{x}{2} + 4$, di un capitale certo $c = 100$ lire e di un capitale a rischio X, che può assumere i valori 30 e 10, con probabilità 0.4 e 0.6, rispettivamente. Supponendo che $\mathcal{I}$ voglia stipuare un contratto assicurativo che gli garantisca il valore massimo del capitale X, determinarne il premio puro k ed il caricamento massimo ℓ^* che egli è disposto ad accettare. Si calcoli inoltre l'equivalente certo m_u^* della posizione finanziaria di $\mathcal{I}$ nel caso stipuli il contratto con tale caricamento.

$k = 12$ $\qquad$ $\ell^* = 0.39848$ $\qquad$ $m_u^* = 117.602$

Esercizio 55

Si consideri un mercato con n titoli rischiosi ed un titolo non rischioso N, di rendimento $i = 10.4443\%$. Si supponga che la deviazione standard del *portafoglio di mercato* M sia $\sigma_M = 0.08$ e che la frontiera delle opportunità del solo comparto rischioso del mercato abbia equazione nel piano (σ, E)

$$\sigma^2 = a + b(E - c)^2 \qquad (\sigma \geq 0),$$

con $a = 0.0011$, $b = 0.11$ e $c = 0.15$. Determinare il rendimento atteso E_M di M, il rendimento atteso E^* e la deviazione standard σ^* del portafoglio a varianza minima dei soli titoli rischiosi e il prezzo di mercato del rischio q. (APPROFONDIMENTO: L'esercizio può essere svolto anche senza conoscere il valore di i, in quanto questo può essere ricavato dagli altri dati del testo.)

$E_M = 36.95$ % $\qquad$ $E^* = 15$ % $\qquad$ $\sigma^* = 0.033166$ $\qquad$ $q = 3.3133$

Esercizio 56

Si consideri un individuo $\mathcal{I}$, dotato un capitale certo $c = 100$ lire, che deve scegliere fra due operazioni finanziarie rischiose caratterizzate da un guadagno aleatorio G_1 e G_2 rispettivamente, ove

$$G_1 = \{52, -50\}, \text{ con probabilità } \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}; \qquad G_2 = \{33, -10\}, \text{ con probabilità } \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}.$$

Sapendo che $\mathcal{I}$ è dotato di una funzione di utilità del tipo $u(x) = x^\alpha$, con $0 < \alpha < 1$, e che percepisce una tolleranza del rischio relativa alla posizione iniziale $B(c) = 300$, determinare gli equivalenti certi $m_u^{(1)}$ ed $m_u^{(2)}$ delle due posizioni $X_1 = c + G_1$ e $X_2 = c + G_2$, rispettivamente,

$m_u^{(1)} =$ 96.4182 $\qquad m_u^{(2)} =$ 100.221

e scegliere l'operazione preferita

a) in base al criterio della speranza matematica: 1

b) in base al criterio dell'utilità attesa: 2

Esercizio 57

Un individuo $\mathcal{I}$ è dotato di una funzione di utilità $u(x) = 3 \log \frac{x}{2} + 5$, di un capitale certo $c = 200$ lire e di un capitale a rischio X, che può assumere i valori 30 e 5, con probabilità 0.4 e 0.6, rispettivamente. Supponendo che $\mathcal{I}$ voglia stipuare un contratto assicurativo che gli garantisca il valore massimo del capitale X, determinarne il premio puro k ed il caricamento massimo ℓ^* che egli è disposto ad accettare. Si calcoli inoltre l'equivalente certo m_u^* della posizione finanziaria di $\mathcal{I}$ nel caso stipuli il contratto con tale caricamento.

$k =$ 15 $\qquad \ell^* =$ 0.34379 $\qquad m_u^* =$ 214.656

Esercizio 58

Si consideri un mercato con n titoli rischiosi ed un titolo non rischioso N, di rendimento $i = 10.3051\%$. Si supponga che la deviazione standard del *portafoglio di mercato* M sia $\sigma_M = 0.07$ e che la frontiera delle opportunità del solo comparto rischioso del mercato abbia equazione nel piano (σ, E)

$$\sigma^2 = a + b(E - c)^2 \qquad (\sigma \geq 0),$$

con $a = 0.0012$, $b = 0.12$ e $c = 0.16$. Determinare il rendimento atteso E_M di M, il rendimento atteso E^* e la deviazione standard σ^* del portafoglio a varianza minima dei soli titoli rischiosi e il prezzo di mercato del rischio q. (Approfondimento: L'esercizio può essere svolto anche senza conoscere il valore di i, in quanto questo può essere ricavato dagli altri dati del testo.)

$E_M =$ 33.56 % $\qquad E^* =$ 16 % $\qquad \sigma^* =$ 0.034641 $\qquad q =$ 3.322

Esercizio 59

Si consideri un individuo $\mathcal{I}$, dotato un capitale certo $c = 40$ lire, che deve scegliere fra due operazioni finanziarie rischiose caratterizzate da un guadagno aleatorio G_1 e G_2 rispettivamente, ove

$$G_1 = \{5, -5\}, \text{ con probabilità } \left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\}; \qquad G_2 = \{45, -15\}, \text{ con probabilità } \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}.$$

Sapendo che $\mathcal{I}$ è dotato di una funzione di utilità del tipo $u(x) = x^\alpha$, con $0 < \alpha < 1$, e che percepisce una tolleranza del rischio relativa alla posizione iniziale $B(c) = 100$, determinare gli equivalenti certi $m_u^{(1)}$ ed $m_u^{(2)}$ delle due posizioni $X_1 = c + G_1$ e $X_2 = c + G_2$, rispettivamente,

$m_u^{(1)} =$ 38.8793 $\qquad m_u^{(2)} =$ 37.2828

e scegliere l'operazione preferita

a) in base al criterio della speranza matematica: 2

b) in base al criterio dell'utilità attesa: 1

Esercizio 60

Un individuo $\mathcal{I}$ è dotato di una funzione di utilità $u(x) = 2\log\frac{x}{3} + 4$, di un capitale certo $c = 300$ lire e di un capitale a rischio X, che può assumere i valori 30 e 3, con probabilità 0.4 e 0.6, rispettivamente. Supponendo che $\mathcal{I}$ voglia stipuare un contratto assicurativo che gli garantisca il valore massimo del capitale X, determinarne il premio puro k ed il caricamento massimo ℓ^* che egli è disposto ad accettare. Si calcoli inoltre l'equivalente certo m_u^* della posizione finanziaria di $\mathcal{I}$ nel caso stipuli il contratto con tale caricamento.

$k =$ `16.2` $\qquad \ell^* =$ `0.27574` $\qquad m_u^* =$ `313.524`

Esercizio 61

Si consideri un mercato con n titoli rischiosi ed un titolo non rischioso N, di rendimento $i = 8.99075\%$. Si supponga che la deviazione standard del *portafoglio di mercato* M sia $\sigma_M = 0.07$ e che la frontiera delle opportunità del solo comparto rischioso del mercato abbia equazione nel piano (σ, E)

$$\sigma^2 = a + b(E-c)^2 \qquad (\sigma \geq 0),$$

con $a = 0.0013$, $b = 0.13$ e $c = 0.15$. Determinare il rendimento atteso E_M di M, il rendimento atteso E^* e la deviazione standard σ^* del portafoglio a varianza minima dei soli titoli rischiosi e il prezzo di mercato del rischio q. (Approfondimento: L'esercizio può essere svolto anche senza conoscere il valore di i, in quanto questo può essere ricavato dagli altri dati del testo.)

$E_M =$ `31.64` % $\qquad E^* =$ `15` % $\qquad \sigma^* =$ `0.036056` $\qquad q =$ `3.2358`

Esercizio 62

Si consideri un individuo $\mathcal{I}$, dotato un capitale certo $c = 50$ lire, che deve scegliere fra due operazioni finanziarie rischiose caratterizzate da un guadagno aleatorio G_1 e G_2 rispettivamente, ove

$$G_1 = \{30, -20\}, \text{ con probabilità } \left\{\frac{3}{10}, \frac{7}{10}\right\}; \qquad G_2 = \{14, -10\}, \text{ con probabilità } \left\{\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right\}.$$

Sapendo che $\mathcal{I}$ è dotato di una funzione di utilità del tipo $u(x) = x^\alpha$, con $0 < \alpha < 1$, e che percepisce una tolleranza del rischio relativa alla posizione iniziale $B(c) = 150$, determinare gli equivalenti certi $m_u^{(1)}$ ed $m_u^{(2)}$ delle due posizioni $X_1 = c + G_1$ e $X_2 = c + G_2$, rispettivamente,

$m_u^{(1)} =$ `43.2869` $\qquad m_u^{(2)} =$ `44.496`

e scegliere l'operazione preferita

a) in base al criterio della speranza matematica: `1`

b) in base al criterio dell'utilità attesa: `2`

Esercizio 63

Un individuo $\mathcal{I}$ è dotato di una funzione di utilità $u(x) = 3\log\frac{x}{4} + 5$, di un capitale certo $c = 400$ lire e di un capitale a rischio X, che può assumere i valori 30 e 7, con probabilità 0.4 e 0.6, rispettivamente. Supponendo che $\mathcal{I}$ voglia stipuare un contratto assicurativo che gli garantisca il valore massimo del capitale X, determinarne il premio puro k ed il caricamento massimo ℓ^* che egli è disposto ad accettare. Si calcoli inoltre l'equivalente certo m_u^* della posizione finanziaria di $\mathcal{I}$ nel caso stipuli il contratto con tale caricamento.

$k =$ `13.8` $\qquad \ell^* =$ `0.15144` $\qquad m_u^* =$ `416.049`

Esercizio 64

Si consideri un mercato con n titoli rischiosi ed un titolo non rischioso N, di rendimento $i = 10.7085\%$. Si supponga che la deviazione standard del *portafoglio di mercato* M sia $\sigma_M = 0.08$ e che la frontiera delle opportunità del solo comparto rischioso del mercato abbia equazione nel piano (σ, E)

$$\sigma^2 = a + b(E-c)^2 \qquad (\sigma \geq 0),$$

con $a = 0.0014$, $b = 0.14$ e $c = 0.16$. Determinare il rendimento atteso E_M di M, il rendimento atteso E^* e la deviazione standard σ^* del portafoglio a varianza minima dei soli titoli rischiosi e il prezzo di mercato del rischio q. (Approfondimento: L'esercizio può essere svolto anche senza conoscere il valore di i, in quanto questo può essere ricavato dagli altri dati del testo.)

$E_M =$ `34.9` % $\qquad E^* =$ `16` % $\qquad \sigma^* =$ `0.037417` $\qquad q =$ `3.0237`

Esercizio 65

Un individuo $\mathcal{I}$, con un capitale certo $c = 200$ lire e caratterizzato da una funzione di utilità

$$u(x) = a \log(x) + b \ , \qquad \text{con} \quad a = 10 \quad \text{e} \quad b = 1 \ ,$$

deve decidere se effettuare una operazione finanziaria, che dà un risultato aleatorio di X lire, che può assumere le determinazioni 10, 5 e -5 lire, con probabilità, rispettivamente, $1/4$, $1/4$ e $1/2$. Si indichi con:

- Y la posizione finanziaria di $\mathcal{I}$ nel caso in cui non effettui l'operazione finanziaria;
- Z la posizione finanziaria di $\mathcal{I}$ nel caso in cui effettui l'operazione finanziaria e, contemporaneamente, stipuli un contratto di assicurazione che gli garantisce il valore massimo di X, con il caricamento sul premio puro fissato al livello massimo accettabile da $\mathcal{I}$;

Determinare il premio puro k del contratto di assicurazione, il caricamento massimo accettabile ℓ^* e le avversioni al rischio $r(Y)$ e $r(Z)$ percepite dall'individuo nella posizione Y e nella posizione Z.

$k = 8.75$ $\qquad \ell^* = 0.10437$ $\qquad r(Y) = 0.005$ $\qquad r(Z) = 0.004972$

Esercizio 66

Un individuo $\mathcal{I}$, con un capitale certo $c = 300$ lire e caratterizzato da una funzione di utilità

$$u(x) = a \left(1 - e^{-\frac{1}{a}x}\right) + b \ , \qquad \text{con} \quad a = 500 \quad \text{e} \quad b = 2 \ ,$$

deve decidere se effettuare una operazione finanziaria, che dà un risultato aleatorio di X lire, che può assumere le determinazioni 10, 5 e -5 lire, con probabilità, rispettivamente, $1/5$, $3/10$ e $1/2$. Si indichi con:

- Y la posizione finanziaria di $\mathcal{I}$ nel caso in cui non effettui l'operazione finanziaria;
- Z la posizione finanziaria di $\mathcal{I}$ nel caso in cui effettui l'operazione finanziaria e, contemporaneamente, stipuli un contratto di assicurazione che gli garantisce il valore massimo di X, con il caricamento sul premio puro fissato al livello massimo accettabile da $\mathcal{I}$;

Determinare il premio puro k del contratto di assicurazione, il caricamento massimo accettabile ℓ^* e le avversioni al rischio $r(Y)$ e $r(Z)$ percepite dall'individuo nella posizione Y e nella posizione Z.

$k = 9$ $\qquad \ell^* = 0.03896$ $\qquad r(Y) = 0.002$ $\qquad r(Z) = 0.002$

Esercizio 67

Un individuo $\mathcal{I}$, con un capitale certo $c = 200$ lire e caratterizzato da una funzione di utilità

$$u(x) = x - \frac{a}{2}x^2 + b \ , \qquad \text{con} \quad a = \frac{1}{500} \quad \text{e} \quad b = 3 \ ,$$

deve decidere se effettuare una operazione finanziaria, che dà un risultato aleatorio di X lire, che può assumere le determinazioni 15, 5 e -10 lire, con probabilità, rispettivamente, $1/5$, $1/5$ e $3/5$. Si indichi con:

- Y la posizione finanziaria di $\mathcal{I}$ nel caso in cui non effettui l'operazione finanziaria;
- Z la posizione finanziaria di $\mathcal{I}$ nel caso in cui effettui l'operazione finanziaria e, contemporaneamente, stipuli un contratto di assicurazione che gli garantisce il valore massimo di X, con il caricamento sul premio puro fissato al livello massimo accettabile da $\mathcal{I}$;

Determinare il premio puro k del contratto di assicurazione, il caricamento massimo accettabile ℓ^* e le avversioni al rischio $r(Y)$ e $r(Z)$ percepite dall'individuo nella posizione Y e nella posizione Z.

$k = 17$ $\qquad \ell^* = 0.17545$ $\qquad r(Y) = 0.003333$ $\qquad r(Z) = 0.003309$

Esercizio 68

Un individuo $\mathcal{I}$, con un capitale certo $c = 300$ lire e caratterizzato da una funzione di utilità

$$u(x) = x^a + b \ , \qquad \text{con} \quad a = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad b = 4 \ ,$$

deve decidere se effettuare una operazione finanziaria, che dà un risultato aleatorio di X lire, che può assumere le determinazioni 15, 5 e -10 lire, con probabilità, rispettivamente, $1/5$, $1/5$ e $3/5$. Si indichi con:

- Y la posizione finanziaria di $\mathcal{I}$ nel caso in cui non effettui l'operazione finanziaria;
- Z la posizione finanziaria di $\mathcal{I}$ nel caso in cui effettui l'operazione finanziaria e, contemporaneamente, stipuli un contratto di assicurazione che gli garantisce il valore massimo di X, con il caricamento sul premio puro fissato al livello massimo accettabile da $\mathcal{I}$;

Determinare il premio puro k del contratto di assicurazione, il caricamento massimo accettabile ℓ^* e le avversioni al rischio $r(Y)$ e $r(Z)$ percepite dall'individuo nella posizione Y e nella posizione Z.

$k = 17$ $\qquad \ell^* = 0.08793$ $\qquad r(Y) = 0.001667$ $\qquad r(Z) = 0.001678$

Esercizio 69

Consideriamo un mercato di titoli azionari in cui siano quotati i titoli di due società: ABC e XYZ. Si supponga che i rendimenti dei due titoli siano normalmente distribuiti e che il rendimento atteso del titolo ABC sia del 15%, quello del titolo XYZ del 20% e che le varianze dei rendimenti siano pari a 0.04 e 0.08, rispettivamente. Supponiamo che in questo mercato siano consentite vendite allo scoperto e che il portafoglio a varianza minima abbia una composizione in cui la quota relativa al titolo XYZ sia pari a -0.17. Si determini il coefficiente di correlazione ρ dei rendimenti dei due titoli e il rendimento atteso E^* e la varianza V^* del portafoglio a varianza minima. Si individui infine, nel caso non si vogliano effettuare vendite allo scoperto, il rendimento atteso $\hat{E}$ e la varianza $\hat{V}$ del portafoglio a varianza minima ottenbile.

$\rho = 0.796814$ $\quad E^* = 14.15$ $\quad V^* = 0.039137$ $\quad \hat{E} = 15$ $\quad \hat{V} = 0.04$

Esercizio 70

Un individuo $\mathcal{I}$, con tolleranza del rischio pari a $B = 100$, è impegnato ad effettuare una operazione finanziaria, che dà un risultato aleatorio di X lire. Si supponga che X sia normalmente distribuita, con media $E(X) = -1$ lira, varianza $V(X) = 500$ e valore massimo $x_{\max} = 5$ lire. Si determini il premio puro k di un contratto di assicurazione che garantisce ad $\mathcal{I}$ il valore massimo di X. Supponiamo inoltre che l'individuo proponga il contratto ad un compagnia con tolleranza del rischio $B' = 1000$. Determinare, accettando l'approssimazione quadratica per le funzioni utilità ed in presenza di spese pari a 1 lira, i valori minimo e massimo del premio caricato π che rende la polizza accettabile per entrambe le parti.

$k = 6$ lire $\quad \pi_{\min} = 7.25$ lire $\quad \pi_{\max} = 8.5$ lire

Esercizio 71

Consideriamo un mercato di titoli azionari in cui siano quotati due titoli. Indicati con A e B i rendimenti dei due titoli, si supponga che questi siano normalmente distribuiti e che il rendimento atteso del titolo A sia $E(A) = 15\%$, mentre quello del titolo B sia $E(B) = 20\%$. Si supponga inoltre che, nel piano (V, E), la frontiera delle opportunità del mercato abbia equazione

$$(E - a)^2 = V - b \ , \qquad \text{con} \quad a = 0.08 \quad \text{e} \quad b = 0.04 \ .$$

Si determini la media E^* e la varianza V^* del rendimento del portafoglio a varianza minima e le varianze $V(A)$ e $V(B)$ dei rendimenti dei due titoli.

$E^* = 8$ % $\quad V^* = 0.04$

$V(A) = 0.0449$ $\quad V(B) = 0.0544$

Parte Facoltativa: Si determini il coefficiente di correlazione ρ fra i rendimenti dei due titoli.

$\rho = 0.979316$

Esercizio 72

Consideriamo un mercato con un certo numero di titoli rischiosi ed un titolo non rischioso N di rendimento $i = 8\%$. Supponiamo che il *portafoglio di mercato* M abbia deviazione standard $\sigma_M = 0.1$ e rendimento atteso $E_M = 16\%$. Un investitore è in possesso di un portafoglio P che ha rendimento atteso $E_P = 12\%$ e deviazione standard $\sigma_P = 0.06$. Verificare se si tratta di un portafoglio efficiente o meno. Determinare inoltre il massimo rendimento atteso $E_{\max}$ di un portafoglio efficiente con deviazione standard pari a σ_P e la minima deviazione standard σ_P di un portafoglio efficiente con rendimento atteso pari a E_P.

P è efficiente: $\begin{cases} \text{sì} \\ \text{no} \quad \times \end{cases}$ $\quad E_{\max} = 12.8$ % $\quad \sigma_{\min} = 0.05$

Esercizio 73

Consideriamo un mercato con un certo numero di titoli rischiosi ed un titolo non rischioso N di rendimento $i = 9\%$. Supponiamo che il *portafoglio di mercato* M abbia deviazione standard $\sigma_M = 0.1$ e rendimento atteso $E_M = 18\%$. Un investitore vuole costruire un portafoglio P di attività rischiose e non rischiose che abbia rendimento atteso $E_P = 16\%$ e deviazione standard $\sigma_P = 0.07$. Verificare se è possibile costruire un tale portafoglio, se cioè P è compreso nell'insieme delle opportunità o meno. Determinare inoltre il massimo rendimento atteso $E_{\max}$ di un portafoglio efficiente con deviazione standard pari a σ_P e la minima deviazione standard σ_P di un portafoglio efficiente con rendimento atteso pari a E_P.

si può costruire P: $\begin{cases} \text{sì} \\ \text{no} \quad \times \end{cases}$ $\quad E_{\max} = 15.3$ % $\quad \sigma_{\min} = 0.07778$

Esercizio 74

Si consideri un individuo $\mathcal{I}_1$, munito di un capitale certo c_1, di un capitale a rischio X_1 e di una funzione di utilità $u_1(x)$, e un secondo individuo $\mathcal{I}_2$, munito di un capitale certo c_2, di un capitale a rischio X_2 e di una funzione di utilità $u_2(x)$. Siano $c_1 = 100$ lire, $c_2 = 100$ lire, $u_1(x) = 2\log(x-1)+3$,, $u_2(x) = 500\left(1-e^{-x/500}\right)$ e si supponga che possano verificarsi solamente i seguenti eventi:

$X_1 = 15$ e $X_2 = 10$, con probabilità $3/4$, oppure $X_1 = -40$ e $X_2 = -35$, con probabilità $1/4$.

Si determinino le utilità attese delle posizioni finanziarie di entrambi gli individui. Si supponga inoltre che $\mathcal{I}_1$ abbia l'opportunità di cedere il proprio capitale a rischio ad $\mathcal{I}_2$, senza ricevere o pagare nulla in cambio. Stabilire se i due individui accettano o meno la cessione.

$E[u_1(c_1+X_1)] = 12.1431$ $\mathcal{I}_1$ accetta: × sì no gli è indifferente

$E[u_2(c_2+X_2)] = 89.2935$ $\mathcal{I}_2$ accetta: sì × no gli è indifferente

Esercizio 75

Si consideri un individuo $\mathcal{I}_1$, munito di un capitale certo c_1, di un capitale a rischio X_1 e di una funzione di utilità $u_1(x)$, e un secondo individuo $\mathcal{I}_2$, munito di un capitale certo c_2, di un capitale a rischio X_2 e di una funzione di utilità $u_2(x)$. Siano $c_1 = 200$ lire, $c_2 = 200$ lire, $u_1(x) = 1000\left(1-e^{-x/1000}\right)$,, $u_2(x) = 2\log(x-2)+3$ e si supponga che possano verificarsi solamente i seguenti eventi:

$X_1 = 60$ e $X_2 = 10$, con probabilità $1/3$, oppure $X_1 = -29$ e $X_2 = -10$, con probabilità $2/3$.

Si determinino le utilità attese delle posizioni finanziarie di entrambi gli individui. Si supponga inoltre che $\mathcal{I}_1$ abbia l'opportunità di cedere il proprio capitale a rischio ad $\mathcal{I}_2$, senza ricevere o pagare nulla in cambio. Stabilire se i due individui accettano o meno la cessione.

$E[u_1(c_1+X_1)] = 181.102$ $\mathcal{I}_1$ accetta: × sì no gli è indifferente

$E[u_2(c_2+X_2)] = 13.5403$ $\mathcal{I}_2$ accetta: sì × no gli è indifferente

Esercizio 76

Si considerino due individui $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$, muniti entrambi di un captale certo, c_1 e c_2 rispettiavamente, e di un capitale a rischio, X_1 e X_2 rispettivamente. Si supponga che $E(X_1) = 50$, $E(X_2) = 55$, $V(X_1) = 100$, $V(X_2) = 200$ e che $B(c_1) = 1000$, $B(c_2) = 2000$. Accettando l'approssimazione quadratica delle funzioni di utilità degli individui e ipotizzando che gli importi in gioco siano sufficientemente piccoli rispetto alle tolleranze del rischio, determinare se i due individui giudicano vantaggioso scambiarsi fra di loro i rispettivi capitali a rischio. Nel caso uno dei due giudichi lo scambio svantaggioso, determinare il prezzo massimo $p_{\max}$ che l'altro è disposto a corrispondergli in aggiunta affinché egli accetti lo scambio. Dire quindi se tale nuova proposta di scambio verrà accettata.

$\mathcal{I}_1$ giudica lo scambio $\begin{cases} \times \text{ vantaggioso} \\ \text{svantaggioso} \\ \text{indifferente} \end{cases}$ $\mathcal{I}_2$ giudica lo scambio $\begin{cases} \text{vantaggioso} \\ \times \text{ svantaggioso} \\ \text{indifferente} \end{cases}$

$\mathcal{I}_1$ è disposto a pagare in aggiunta $p_{\max} = 4.95$; l'altro accetta $\begin{cases} \text{sì} \\ \times \text{ no} \\ \text{gli è indifferente} \end{cases}$

Esercizio 77

Si consideri un individuo $\mathcal{I}_1$, munito di un capitale certo c_1, di un capitale a rischio X_1 e di una funzione di utilità $u_1(x)$, e un secondo individuo $\mathcal{I}_2$, con un capitale certo c_2, privo di capitale a rischio e munito di una funzione di utilità $u_2(x)$. Siano $c_1 = 100$ lire, $c_2 = 110$ lire, $u_1(x) = x^{1/2}$, $u_2(x) = x^{1/3}$ e sia $X_1 = \{15, -40\}$, con probabilità $\{3/4, 1/4\}$. Si determini il prezzo massimo $p_{\max}$ che $\mathcal{I}_1$ è disposto a pagare a $\mathcal{I}_2$, affinché quest'ultimo accetti di accollarsi il capitale a rischio X_1. Si determini l'equivalente certo m_u della posizione finanziaria di $\mathcal{I}_2$ nel caso questi decida di accollarsi X_1 in cambio di $p_{\max}$ e stabilire se $\mathcal{I}_2$ accetta la transazione.

$p_{\max} = 0.412661$ $m_u = 109.659$ $\mathcal{I}_2$ accetta: $\begin{cases} \text{sì} \\ \times \text{ no} \\ \text{gli è indifferente} \end{cases}$

Esercizio 78

Sia dato un mercato in cui siano quotati due titoli azionari, H.A.L. e Connex. Si supponga che il prezzo di una azione H.A.L. sia 50 lire e che quello di una azione Connex sia 100 lire. Si supponga inoltre che, alla fine del periodo di investimento, possano verificarsi solo i seguenti eventi:

1) una azione H.A.L. vale 70 lire e una azione Connex vale 125 lire, con probabilità 0.6.
2) una azione H.A.L. vale 55 lire e una azione Connex vale 105 lire, con probabilità 0.4.

Si supponga inoltre che il coefficiente di correlazione dei rendimenti delle due azioni sia $\rho = 0.65$. Si determini il rendimento atteso e la varianza del rendimento di entrambe le azioni. Si consideri infine un individuo che, senza potere effettuare vendite allo scoperto, vuole investire 100 lire in un portafoglio dei due titoli, composto in modo tale da avere la minima rischiosità possibile. Si determini quante lire deve investire in ciascuna delle due azioni per raggiungere lo scopo e si calcoli il rendimento atteso e la varianza del rendimento del portafoglio costruito.

rendimento atteso dell'azione H.A.L. = 28 %

rendimento atteso dell'azione Connex = 17 %

varianza del rendimento dell'azione H.A.L. = 0.0216

varianza del rendimento dell'azione Connex = 0.0096

investimento in H.A.L. = 1.923077 lire

investimento in Connex = 98.07692 lire

$E^* =$ 17.2115 %

$V^* =$ 0.009595

Esercizio 79

Sia dato un mercato di titoli azionari in cui siano quotate le azioni di due socità: la *Sole Verde* e la *S.I.E.S.*. Si supponga che i rendimenti delle due azioni siano normalmente distribuiti e che le medie siano 35% e 21%, rispettivamente, mentre le varianze siano 0.08 e 0.04, rispettivamente. Sapendo che il coefficiente di correlazione dei due titoli è 0.6 e supponendo che non sia possibile effettuare vendite allo scoperto, costruire il portafoglio dei due titoli a varianza minima, indicando le quote percentuali di composizione relative alle azioni delle due società. Si determini infine il rendimento atteso E e la varianza V di tale portafoglio.

quota di *Sole Verde* = 11.6254 % $\qquad E =$ 22.6276 %

quota di *S.I.E.S.* = 88.3746 % $\qquad V =$ 0.039296

Esercizio 80

Un individuo $\mathcal{I}$, con un capitale certo $c = 50$ lire e caratterizzato da una funzione di utilità

$$u(x) = 2\sqrt[3]{x} + 10 \ ,$$

deve decidere se effettuare una operazione finanziaria, che dà un risultato aleatorio di X lire. Si supponga che X possa assumere le determinazioni 10, 5 e -5 lire, con probabilità, rispettivamente, 1/4, 1/4 e 1/2. Si indichi con:

- Y la posizione finanziaria di $\mathcal{I}$ nel caso in cui non effettui l'operazione finanziaria;
- Z la posizione finanziaria di $\mathcal{I}$ nel caso in cui effettui l'operazione finanziaria e, contemporaneamente, stipuli un contratto di assicurazione che gli garantisce il valore massimo di X, con il caricamento sul premio puro fissato al livello massimo accettabile da $\mathcal{I}$;

Determinare il premio puro k del contratto di assicurazione, il coefficiente di caricamento massimo accettabile η^* e gli equivalenti certi $m_u^{(Y)}$ e $m_u^{(Z)}$ relativi alle posizioni Y e Z, rispettivamente.

$k =$ 8.75 lire $\qquad m_u^{(Y)} =$ 50 lire

$\eta^* =$ 3.106109 % $\qquad m_u^{(Z)} =$ 50.97822 lire

Esercizio 81

Sia dato un mercato con un certo numero di titoli rischiosi e con un titolo N non rischioso, caratterizzato da un rendimento $i = 8$ %. Sia $E_M = 16$ % il rendimento atteso del portafoglio di mercato M e si consideri il portafoglio P, composto per il 40% da quote del titolo N, mentre le quote restanti sono relative al portafoglio di mercato. Sapendo che P è efficiente e che la varianza del suo rendimento è $V_P = 0.004$, determinare il rendimento atteso E_P di P, la varianza V_M del rendimento del portafoglio di mercato ed il prezzo di mercato del rischio q.

$E_P = 12.8$ % $V_M = 0.011111$ $q = 0.758947$

Esercizio 82

Sia dato un mercato in cui siano trattati un certo numero di titoli rischiosi ed un titolo non rischioso N. Si supponga che il portafoglio di mercato M abbia rendimento atteso $E_M = 25\%$ e varianza del rendimento $V_M = 0.02$. Sia dato inoltre un titolo efficiente A, caratterizzato dal suo rendimento atteso $E_A = 20\%$ e dalla varianza del suo rendimento $V_A = 0.01$. Si determini il prezzo di mercato del rischio q ed il rendimento i del titolo non rischioso N. Si supponga infine di volere costruire un portafoglio efficiente P, composto da quote di M e di A. Si determini quale percentuale di composizione α_M relativa ad M e quale percentuale di composizione α_A relativa ad A bisogna scegliere, in modo da ottenere che il rendimento atteso di P sia $E_P = 22\%$.

$q = 1.207107$ $i = 7.92893$ %

$\alpha_M = 40$ % $\alpha_A = 60$ %

Esercizio 83

Sia dato un mercato in cui siano trattati un certo numero di titoli rischiosi ed un titolo non rischioso N. Si supponga che il rendimento del titolo non rischioso sia $i = 8\%$ e che il portafoglio di mercato M abbia varianza del rendimento $V_M = 0.02$. Sia dato inoltre un titolo efficiente A, caratterizzato dal suo rendimento atteso $E_A = 20\%$ e dalla varianza del suo rendimento $V_A = 0.01$. Si determini il rendimento E_M del portafoglio di mercato ed il prezzo di mercato del rischio q. Si supponga infine di volere costruire un portafoglio efficiente P, composto da quote di M e di A. Si determini quale percentuale di composizione α_M relativa ad M e quale percentuale di composizione α_A relativa ad A bisogna scegliere, in modo da ottenere che il rendimento atteso di P sia $E_P = 22\%$.

$q = 1.2$ $E_M = 24.9706$ %

$\alpha_M = 40.2369$ % $\alpha_A = 59.7631$ %

Esercizio 84

Sia dato un mercato in cui siano trattati due titoli rischiosi A e B. Si supponga che i rendimenti dei due titoli abbiano media e varianza, rispettivamente $E_A = 30\%$, $V_A = 0.02$, $E_B = 20\%$, $V_B = 0.003$ e che il coefficiente di correlazione tra i due sia $\rho = 0.2$. Considerando l'insieme dei possibili portafogli del tipo $\alpha A + (1 - \alpha)B$, si determini anzitutto il portafoglio a varianza minima α^*. Si trovi quindi, fra tutti i portafogli con rendimento atteso pari al 22%, quello α' a varianza più bassa e poi, fra tutti i portafogli con varianza pari a 0.004, quello α'' con il maggior rendimento atteso.

$\alpha^* = 7.28989$ % $\alpha' = 20$ % $\alpha'' = 30.8614$ %

Esercizio 85

Si consideri un individuo $\mathcal{I}$ che deve decidere se effettuare un'operazione finanziaria rischiosa, caratterizzata dal guadagno aleatorio $G = \{20, 10, -5, -10\}$ lire, con probabilità $\{1/4, 1/4, 3/8, 1/8\}$. Sapendo che $\mathcal{I}$ ha un capitale certo di 100 lire e che è caratterizzato dalla funzione di utilità

$$u(x) = 7\log(x + 5) - 2 \;\; ,$$

calcolare l'utilità attesa e l'equivalente certo della posizione finanziaria dell'individuo nel caso questi effettui l'operazione rischiosa e stabilire se la effettuerà o meno.

$E[u(c + G)] = 30.8264$ $m_u = 103.797$

× sì
no
indifferente
non si può dire

Esercizio 86

Si considerino due individui:
– $\mathcal{I}_1$, con capitale certo $c_1 = 100$, capitale a rischio $X_1 = \{10, -5\}$ e funzione di utilità $u_1(x) = 200\left[1 - e^{-x/200}\right]$;
– $\mathcal{I}_2$, con capitale certo $c_2 = 50$, capitale a rischio $X_2 = \{4, -2\}$ e funzione di utilità $u_2(x) = x - \frac{1}{200}x^2$.
Si supponga che possano verificarsi solo gli eventi:

$$X_1 = 10 \text{ e } X_2 = 4, \text{ con probabilità } 0.3 \qquad \text{e} \qquad X_1 = -5 \text{ e } X_2 = -2, \text{ con probabilità } 0.7.$$

Si calcolino le utilità attese E_1 ed E_2 delle posizioni finanziarie dei due individui. Si supponga inoltre che vi sia la possibiltà che $\mathcal{I}_1$ si accolli, oltre al proprio, anche il capitale a rischio dell'altro individuo, a fronte del pagamento di una certa somma s. Determinare la la somma massima $s_{\max}$ che $\mathcal{I}_2$ è disposto a corrispondergli e se $\mathcal{I}_1$ accetterà la transazione.

$E_1 =$ 78.3191 $\qquad E_2 =$ 37.362 $\qquad s_{\max} =$ 0.27524

$\mathcal{I}_1$ accetta: sì $\qquad$ × no $\qquad$ non è dato saperlo

Esercizio 87

Consideriamo un mercato di due titoli rischiosi, i cui rendimenti siano A e B. Si supponga che $E(A) = 20\%$, che $E(B) = 30\%$ e che la frontiera delle opportunità di mercato nel piano (σ, E) sia descritta dall'equazione

$$\sigma^2 - 0.00255 = 0.5(E - 0.23)^2 \ .$$

Si determinino le varianze dei rendimenti attesi dei due titoli, il rendimento atteso E^* e la deviazione standard σ^* del portafoglio a varianza minima e si stabilisca se A e B sono efficienti o meno. [Suggerimento: ricordare che, nel caso di due soli titoli, l'insieme delle opportunità coincide con la sua frontiera.]

$V(A) =$ 0.003 $\qquad V(B) =$ 0.005 $\qquad E^* =$ 23 % $\qquad \sigma^* =$ 0.050498

A è efficiente:
- sì
- × no
- non si può dire nulla

B è efficiente:
- × sì
- no
- non si può dire nulla

Esercizio 88

In riferimento al mercato dell'esercizio precedente, si supponga che vi sia anche un titolo non rischioso, di rendimento i. Sapendo che il portafoglio di mercato è composto dal solo titolo B, si determini il rendimento del titolo non rischioso ed il prezzo di mercato del rischio q.

$i =$ 15.7143% $\qquad q =$ 2.020305