

---

# Esercizi di Matematica Finanziaria

## Selezione del portafoglio

**Claudio Pacati**      **Roberto Renò**  
Università degli Studi di Siena      Università degli Studi di Verona  
CLAUDIO.PACATI@UNISI.IT      ROBERTO.RENO@UNIVR.IT

---

Versione del 16 gennaio 2018

**Temati trattati in questa raccolta di esercizi:**

- **Rischio e rendimento**
- **Modello media-varianza**
- **Valutazione delle azioni**

A pagina 6 le soluzioni di alcuni degli esercizi.

### Esercizio 1

Si consideri un mercato azionario in cui siano quotati due titoli  $I_1$  e  $I_2$  con rendimenti attesi  $E_1 = 9\%$ ,  $E_2 = 1\%$  e varianze  $V_1 = 0.08$ ,  $V_2 = 0.02$ . La correlazione fra i due titoli sia  $\rho = -0.1$ . Fra le composizioni di portafoglio del tipo  $I = \alpha I_1 + (1 - \alpha)I_2$ , si calcoli la composizione  $\alpha^*$  del portafoglio a varianza minima, il rendimento atteso  $E^*$  e la varianza  $V^*$  di tale portafoglio.

Si calcoli poi la composizione  $\alpha$  del portafoglio che permette di avere una varianza pari a  $V_2$  ma un rendimento maggiore di  $E_2$ , e si calcoli tale rendimento  $E$ .

Dire infine, motivando la risposta, se esiste un portafoglio, ottenibile come combinazione di  $I_1$  e  $I_2$ , con rendimento atteso  $E_2$  e varianza minore di  $V_2$ .

### Esercizio 2

Si consideri un mercato di titoli azionari in cui siano quotati due titoli  $I_1$  e  $I_2$  con rendimenti attesi  $E_1 = 5\%$ ,  $E_2 = 2\%$  e varianze  $V_1 = E_1$ ,  $V_2 = E_2$ . Tra i due titoli c'è totale assenza di correlazione ( $\rho = 0$ ). Fra le composizioni di portafoglio del tipo  $I = \alpha I_1 + (1 - \alpha)I_2$ , si calcoli la composizione  $\alpha_a$  e la varianza  $V_a$  del portafoglio efficiente con rendimento atteso pari a  $E_a = 4\%$ .

Si calcolino infine poi la composizione  $\alpha^*$ , il rendimento  $E^*$  in forma percentuale e la varianza del portafoglio con varianza minima.

### Esercizio 3

Si consideri un mercato di titoli azionari in cui siano quotati due titoli  $I_1$  e  $I_2$  con rendimenti attesi  $E_1 = 5\%$ ,  $E_2 = 2\%$  e varianze  $V_1 = E_1$ ,  $V_2 = E_2$ . I due titoli sono perfettamente correlati negativamente ( $\rho = -1$ ). Fra le composizioni di portafoglio del tipo  $I = \alpha I_1 + (1 - \alpha)I_2$ , si calcoli la

composizione  $\alpha_a$  e la varianza  $V_a$  del portafoglio efficiente con rendimento atteso pari a  $E_a = 4\%$ .

Si calcolino infine poi la composizione  $\alpha^*$ , il rendimento  $E^*$  in forma percentuale e la varianza del portafoglio con varianza minima.

### Esercizio 4

Si consideri il problema dell'investimento in un mercato in cui siano presenti solo due titoli, il primo con rendimento medio annuo  $E_1 = 3\%$  e varianza  $V_1 = 0.05$ , il secondo con rendimento medio annuo  $E_2 = 2\%$  e varianza  $V_2 = 0$ .

Si supponga di investire una percentuale  $\alpha$  del proprio capitale nel titolo 1 e  $1 - \alpha$  nel titolo 2. Si determini la percentuale  $\tilde{\alpha}$  tale per cui il rendimento del portafoglio così ottenuto sia  $\tilde{E} = 2.8\%$ , e si determini la varianza  $\tilde{V}$  del portafoglio così ottenuto.

Si risponda alla stessa domanda nel caso in cui la varianza del titolo due sia invece  $V_2' = 0.04$ , e la correlazione fra i due titoli misurata tramite il coefficiente di correlazione sia  $\rho = -0.5$ .

### Esercizio 5

Si consideri il problema dell'investimento in un mercato in cui siano presenti solo due titoli fra loro non correlati, il primo con rendimento medio annuo  $E_1 = 3\%$ , il secondo con rendimento medio annuo  $E_2 = 1\%$ . I titoli hanno le varianze uguali alle loro medie.

Si supponga di investire una percentuale  $\alpha$  del proprio capitale nel titolo 1 e  $1 - \alpha$  nel titolo 2. Si determini la percentuale  $\alpha'$  tale per cui il rendimento del portafoglio così ottenuto sia  $E' = 2.5\%$ , e si determini la varianza  $V'$  del portafoglio così ottenuto.

Si risponda alla stessa domanda nel caso in cui i titoli siano correlati con coefficiente di correlazione  $\rho = -0.2$ .

### Esercizio 6

Si consideri il problema dell'investimento in un mercato in cui siano presenti solo due titoli, il primo con rendimento atteso  $E_1 = 6\%$  e varianza  $V_1 = 0.05$ , il secondo con

rendimento atteso  $E_2 = 2\%$  e varianza  $V_2 = 0.015$ . Il coefficiente di correlazione fra i rendimenti dei due titoli è  $\rho = 0.98$ .

Si supponga di investire in un portafoglio fra i due titoli con una percentuale  $\alpha$  del proprio capitale investita nel titolo 1 ed una percentuale  $1 - \alpha$  nel titolo 2. Si determini, nell'ipotesi che siano permesse vendite allo scoperto, la percentuale  $\alpha^*$  tale per cui risulta minima la varianza del portafoglio così costruito e si determini il rendimento atteso  $E^*$  e la varianza  $V^*$  di tale portafoglio.

Si risponda alla stessa domanda nel caso in cui non siano permesse vendite allo scoperto.

Si determini infine per quale valore del coefficiente di correlazione  $\rho'$  la composizione del portafoglio a varianza minima è caratterizzata da una quota del primo titolo che è la metà della quota del secondo titolo.

### Esercizio 7

Un investitore vuole investire in un fondo azionario che ha un rendimento annuo atteso dell'8% e una deviazione standard del 15%, e in BOT a un anno, che presentano un rendimento del 4% e sono privi di rischio.

Si calcoli la percentuale  $\alpha$  da investire nel fondo, assumendo di investire la restante percentuale  $1 - \alpha$  nel BOT, in maniera che la deviazione standard del suo portafoglio sia del 4%. Si calcoli per tale percentuale il rendimento atteso  $E_\alpha$  del suo portafoglio.

Si dica se il portafoglio così ottenuto è efficiente, motivando la risposta.

Si calcoli infine la frazione  $\alpha'$  nel caso che l'investitore abbia un obiettivo di rendimento del 10%, e se ne calcoli la deviazione standard  $\sigma_{\alpha'}$  corrispondente.

### Esercizio 8

Si consideri un mercato azionario in cui siano quotati due titoli rischiosi con rendimenti aleatori  $I_1$  e  $I_2$ . I rendimenti attesi dei titoli sono  $E_1 = 5\%$ ,  $E_2 = 3\%$  e le varianze  $V_1 = 0.05$ ,  $V_2 = 0.04$ . La correlazione fra i due titoli è nulla. Fra le composizioni di portafoglio del tipo  $I = \alpha I_1 + (1 - \alpha)I_2$ , si calcoli la composizione  $\alpha^*$  del portafoglio a varianza minima, il rendimento atteso  $E^*$  e la varianza  $V^*$  di tale portafoglio.

Si calcoli poi il rendimento atteso  $E_P$  e la varianza  $V_P$  di un portafoglio  $P$  composto per il 35% dal titolo  $I_1$  e per la restante parte dal titolo  $I_2$ . Dire infine, motivando la risposta se il portafoglio  $P$  è efficiente.

### Esercizio 9

Si consideri il problema dell'investimento in un mercato in cui siano presenti solo due titoli fra loro non correlati, il primo con rendimento medio annuo  $E_1 = 3\%$ , il secondo con rendimento medio annuo  $E_2 = 1\%$ . I titoli hanno le varianze uguali alle loro medie.

Si supponga di investire una percentuale  $\alpha$  del proprio capitale nel titolo 1 e  $1 - \alpha$  nel titolo 2. Si determini la percentuale  $\alpha'$  tale per cui il rendimento del portafoglio

così ottenuto sia  $E' = 2.5\%$ , e si determini la varianza  $V'$  del portafoglio così ottenuto.

Si risponda alla stessa domanda nel caso in cui i titoli siano correlati con coefficiente di correlazione  $\rho = 0.88$

### Esercizio 10

Si consideri il problema dell'investimento in un mercato in cui siano presenti solo due titoli  $T_1$  e  $T_2$ , il primo con rendimento atteso  $E_1 = 6.5\%$  e varianza  $V_1 = 0.08$ , il secondo con rendimento atteso  $E_2$  e varianza  $V_2 = 0.015$ ; vi è totale assenza di correlazione fra i rendimenti dei due titoli. Si supponga di investire in un portafoglio fra i due titoli con una percentuale  $\alpha = 0.60$  del proprio capitale investita nel titolo più rischioso ed una percentuale  $1 - \alpha$  nell'altro titolo; sapendo che il rendimento atteso di tale portafoglio è pari allo 0.02% si determini  $E_2$ .

Si determini, nell'ipotesi che siano permesse vendite allo scoperto, la percentuale  $\alpha^*$  tale per cui risulta minima la varianza del portafoglio così costruito e si determini il rendimento atteso  $E^*$  e la varianza  $V^*$  di tale portafoglio.

Si calcoli la varianza  $V_0$  del portafoglio composto da  $\alpha_0 = 2\alpha^*$  quote del primo titolo e  $1 - \alpha_0$  quote del secondo titolo.

Sia  $\varepsilon$  un numero positivo; dire motivando adeguatamente la risposta, quale dei seguenti portafogli è certamente efficiente:

- quello composto da  $\alpha_0 + \varepsilon$  quote del primo titolo;
- quello composto da  $\alpha_0 - \varepsilon$  quote del primo titolo.

### Esercizio 11

Si consideri un mercato in cui sono presenti due titoli,  $A$  e  $B$ . I titoli hanno rendimenti attesi  $\mu_A = 4\%$  e  $\mu_B = 2\%$ , e varianze  $V_A = (22\%)^2$  e  $V_B = (10\%)^2$ . Un investitore decide di investire unicamente in questi due titoli, formando un portafoglio in cui acquista un valore di 12 000€ del titolo  $A$  e di 28 000€ del titolo  $B$ . Si calcoli il rendimento atteso  $\mu$ , in termini percentuali, del portafoglio dell'investitore.

Sapendo che l'investitore in questione ha minimizzato la varianza, si calcoli la correlazione  $\rho$  tra i due titoli e la deviazione standard  $\sigma$  del rendimento del portafoglio.

### Esercizio 12

Si consideri un mercato azionario in cui siano quotati due titoli rischiosi di rendimenti aleatori  $I_1$  ed  $I_2$ , con aspettative  $E(I_1) = 8.5\%$  e  $E(I_2) = 2\%$  e varianze  $V_1 = 0.05$  e  $V_2 = 0.01$ . I titoli sono perfettamente correlati negativamente. Fra le composizioni di portafoglio del tipo  $I = \alpha I_1 + (1 - \alpha)I_2$ , si individui per quale valore di  $\alpha$  il portafoglio ha rendimento pari a  $V_1$  e la varianza di tale portafoglio.

Si calcoli ora:

- la composizione  $\alpha^*$  del portafoglio a varianza minima nell'ipotesi che non siano ammesse vendite allo scoperto fra i due titoli ed il rendimento atteso  $E^*$  e la varianza  $V^*$  di tale portafoglio.
- la composizione  $\alpha'$  del portafoglio a varianza minima nell'ipotesi che siano ammesse vendite allo scoperto.

**Esercizio 13**

Si consideri un mercato azionario in cui siano quotati due titoli  $I_1$  e  $I_2$  con rendimenti attesi  $E_1 = 5\%$ ,  $E_2 = 2\%$  e varianze  $V_1 = E_1$ ,  $V_2 = E_2$ . La correlazione fra i due titoli sia  $\rho = -0.2$ . Fra le composizioni di portafoglio del tipo  $I = \alpha I_1 + (1 - \alpha)I_2$ , si calcoli la composizione  $\alpha_a$  e la varianza  $V_a$  del portafoglio efficiente con rendimento atteso pari a  $E_a = 4\%$ .

Si calcoli poi la composizione  $\alpha_b$  e il rendimento  $E_b$  in forma percentuale del portafoglio efficiente con varianza complessiva pari a  $V_b = 3\%$ .

**Esercizio 14****Esercizio 15**

Si consideri un mercato azionario in cui siano quotati due titoli rischiosi di rendimenti aleatori  $I_1$  ed  $I_2$ , con aspettative  $E(I_1) = 8\%$  e  $E(I_2) = 2\%$  e varianze  $V_1 = 0.06$  e  $V_2 = 0.03$ . I titoli sono non correlati. Fra le composizioni di portafoglio del tipo  $I = \alpha I_1 + (1 - \alpha)I_2$ , si individui il portafoglio efficiente  $\tilde{\alpha}$  che ha varianza  $0.04$  e se ne determini l'aspettativa del rendimento  $\tilde{E}$

Si calcoli ora:

- i) la composizione  $\alpha'$  del portafoglio a varianza minima nell'ipotesi che non siano ammesse vendite allo scoperto ed il rendimento atteso  $E'$  e la varianza  $V'$  di tale portafoglio.
- ii) la composizione  $\alpha''$ , il rendimento atteso  $E''$  e la varianza  $V''$  del portafoglio a varianza minima nell'ipotesi che siano ammesse vendite allo scoperto.

**Esercizio 16**

Si consideri il problema dell'investimento in un mercato in cui siano presenti solo due titoli  $T_1$  e  $T_2$ , il primo con rendimento atteso  $E_1 = 3\%$  e varianza  $V_1 = 0.02$ , il secondo con rendimento atteso  $E_2 = 1\%$  e varianza  $V_2 = 0.01$ . Il coefficiente di correlazione fra i rendimenti dei due titoli è  $\rho = -0.10$ .

Si supponga di investire in un portafoglio fra i due titoli con una percentuale  $\alpha$  del proprio capitale investita nel titolo più rischioso ed una percentuale  $1 - \alpha$  nell'altro titolo. Si determini, nell'ipotesi che siano permesse vendite allo scoperto, la percentuale  $\alpha^*$  tale per cui risulta minima la varianza del portafoglio così costruito e si determini il rendimento atteso  $E^*$  e la varianza  $V^*$  di tale portafoglio.

Si risponda alle stesse domande nel caso in cui non siano permesse vendite allo scoperto.

Dire, motivando adeguatamente la risposta, se un portafoglio costituito esclusivamente da  $T_2$  è efficiente.

**Esercizio 17**

Si consideri il problema dell'investimento in un mercato in cui siano presenti solo due titoli  $T_1$  e  $T_2$ , il primo con rendimento atteso  $E_1 = 6\%$  e varianza  $V_1 = 0.08$ , il secondo con rendimento atteso  $E_2 = 4\%$  e varianza  $V_2 = 0.04$ . Il coefficiente di correlazione fra i rendimenti dei due titoli è  $\rho = 0.10$ .

Si supponga di investire in un portafoglio fra i due titoli con una percentuale  $\alpha$  del proprio capitale investita nel titolo più rischioso ed una percentuale  $1 - \alpha$  nell'altro titolo. Si determini, nell'ipotesi che siano permesse vendite allo scoperto, la percentuale  $\alpha^*$  tale per cui risulta minima la varianza del portafoglio così costruito e si determini il rendimento atteso  $E^*$  e la varianza  $V^*$  di tale portafoglio.

Si risponda alle stesse domande nel caso in cui non siano permesse vendite allo scoperto.

Nel caso siano consentite vendite allo scoperto dire, motivando adeguatamente la risposta, se i portafogli costituiti da uno solo dei titoli sono efficienti; le possibilità sono:

- a) nessun portafoglio composto da un solo titolo è efficiente.
- b) i portafogli composti esclusivamente da quote di  $T_1$  sono efficienti, non lo sono quelli composti esclusivamente da quote di  $T_2$ .
- c) i portafogli composti esclusivamente da quote di  $T_2$  sono efficienti, non lo sono quelli composti esclusivamente da quote di  $T_1$ .
- d) tutti i portafogli composti da uno solo dei due titoli, qualunque esso sia, sono entrambi efficienti.

**Esercizio 18**

Si consideri un mercato azionario in cui siano quotati due titoli rischiosi di rendimenti aleatori  $I_1$  ed  $I_2$ , con aspettative  $E(I_1) = 5.5\%$  e  $E(I_2) = 2\%$  e varianze  $V_1 = 0.05$  e  $V_2 = 0.01$ . Il coefficiente di correlazione fra i rendimenti dei due titoli sia  $\rho = 0.99$ . Si calcolino il rendimento atteso e la varianza del portafoglio in cui la quota investita nel primo titolo è il triplo della quota investita nel secondo.

Fra le composizioni di portafoglio del tipo  $I = \alpha I_1 + (1 - \alpha)I_2$ , si calcoli:

- i) la composizione  $\alpha^*$  del portafoglio a varianza minima nell'ipotesi che non siano ammesse vendite allo scoperto fra i due titoli ed il rendimento atteso  $E^*$  e la varianza  $V^*$  di tale portafoglio.
- ii) la composizione  $\alpha'$  del portafoglio a varianza minima nell'ipotesi che siano ammesse vendite allo scoperto fra i due titoli ed il rendimento atteso  $E'$  e la varianza  $V'$  di tale portafoglio.

**Esercizio 19**

Si consideri il problema dell'investimento in un mercato in cui siano presenti solo due titoli, il primo con rendimento atteso  $E_1 = 4\%$  e varianza  $V_1 = 0.04$ , il secondo con rendimento atteso  $E_2 = 3\%$  e varianza  $V_2 = 0.02$ . Il coefficiente di correlazione fra i rendimenti dei due titoli è  $\rho = 0.25$ .

Si supponga di investire in un portafoglio fra i due titoli con una percentuale  $\alpha$  del proprio capitale investita nel titolo 1 ed una percentuale  $1 - \alpha$  nel titolo 2. Si determini, nell'ipotesi che siano permesse vendite allo scoperto, la percentuale  $\alpha^*$  tale per cui risulta minima la varianza del portafoglio così costruito e si determini il rendimento atteso  $E^*$  e la varianza  $V^*$  di tale portafoglio.

Si risponda alla stessa domanda nel caso in cui non siano permesse vendite allo scoperto.

Si determini infine la composizione  $\alpha^{***}$ , la media  $E^{***}$  e la varianza del rendimento  $V^{***}$  del portafoglio a minimo rischio, nel caso in cui i due titoli siano indipendenti ed abbiano quindi correlazione nulla.

### Esercizio 20

Si consideri il problema dell'investimento in un mercato in cui siano presenti solo due titoli, il primo con rendimento atteso  $E_1 = 8\%$  e varianza  $V_1 = 0.08$ , il secondo con rendimento atteso  $E_2 = 4\%$  e varianza  $V_2 = 0.02$ . Il coefficiente di correlazione fra i rendimenti dei due titoli è  $\rho = 0.17$ .

Si supponga di investire in un portafoglio fra i due titoli con una percentuale  $\alpha$  del proprio capitale investita nel titolo più rischioso ed una percentuale  $1 - \alpha$  nell'altro titolo. Si determini, nell'ipotesi che siano permesse vendite allo scoperto, la percentuale  $\alpha^*$  tale per cui risulta minima la varianza del portafoglio così costruito e si determini il rendimento atteso  $E^*$  e la varianza  $V^*$  di tale portafoglio.

Si risponda alla stessa domanda nel caso in cui non siano permesse vendite allo scoperto.

Si determinino infine la quota  $\alpha_0$  da investire nel primo titolo per ottenere un portafoglio con rendimento atteso pari al 5% e la varianza di tale portafoglio nell'ipotesi di totale assenza di correlazione.

### Esercizio 21

### Esercizio 22

Si consideri il problema dell'investimento in un mercato in cui siano presenti solo due titoli, il primo con rendimento atteso  $E_1 = 3\%$  e varianza  $V_1 = 0.05$ , il secondo con rendimento atteso  $E_2 = 2\%$  e varianza  $V_2 = 0$ .

Si supponga di investire una percentuale  $\alpha$  del proprio capitale nel titolo 1 e  $1 - \alpha$  nel titolo 2. Si determini la percentuale  $\alpha'$  tale per cui il rendimento del portafoglio così ottenuto sia  $E' = 2.5\%$ , e si determini la varianza  $V'$  del portafoglio così ottenuto.

Si risponda alla stessa domanda nel caso in cui la varianza del titolo due sia invece  $V_2'' = 0.03$ , e la correlazione fra i due titoli misurata tramite il coefficiente di correlazione sia  $\rho = 0.85$ .

### Esercizio 23

Si consideri un mercato azionario in cui siano quotati due titoli rischiosi di rendimenti aleatori  $I_1$  ed  $I_2$ , con aspettative  $E(I_1) = 9\%$  e  $E(I_2) = 3\%$  e varianze  $V_1 = 0.06$  e  $V_2 = 0.03$ . I titoli sono non correlati. Fra le composizioni di portafoglio del tipo  $I = \alpha I_1 + (1 - \alpha) I_2$ , si individui il portafoglio efficiente  $\tilde{\alpha}$  che ha varianza 0.04 e se ne determini l'aspettativa del rendimento  $\tilde{E}$ .

Si calcoli ora:

i) la composizione  $\alpha^*$  del portafoglio a varianza minima nell'ipotesi che non siano ammesse vendite allo scoperto ed il rendimento atteso  $E^*$  e la varianza  $V^*$  di tale portafoglio.

ii) la composizione  $\alpha'$ , il rendimento atteso  $E'$  e la varianza  $V'$  del portafoglio a varianza minima nell'ipotesi che siano ammesse vendite allo scoperto.

### Esercizio 24

Si consideri il problema dell'investimento in un mercato in cui siano presenti solo due titoli, il primo con rendimento atteso  $E_1 = 8\%$  e varianza  $V_1 = 0.06$ , il secondo con rendimento atteso  $E_2 = 4\%$  e varianza  $V_2 = 0.012$ . Il coefficiente di correlazione fra i rendimenti dei due titoli è  $\rho = -0.28$ .

Si supponga di investire in un portafoglio fra i due titoli con una percentuale  $\alpha$  del proprio capitale investita nel titolo 1 ed una percentuale  $1 - \alpha$  nel titolo 2. Si determini, nell'ipotesi che siano permesse vendite allo scoperto, la percentuale  $\alpha^*$  tale per cui risulta minima la varianza del portafoglio così costruito e si determini il rendimento atteso  $E^*$  e la varianza  $V^*$  di tale portafoglio.

Si risponda alla stessa domanda nel caso in cui non siano permesse vendite allo scoperto.

Si determini infine per quale valore del coefficiente di correlazione  $\rho'$  la composizione del portafoglio a varianza minima è caratterizzata da una quota del primo titolo pari al 30% dell'intero portafoglio.

### Esercizio 25

Si consideri un mercato azionario in cui siano quotati due titoli rischiosi di rendimenti aleatori  $I_1$  ed  $I_2$ , con aspettative  $E(I_1) = 6\%$  e  $E(I_2) = 2\%$  e varianze  $V_1 = 0.06$  e  $V_2 = 0.02$ . Il coefficiente di correlazione fra i rendimenti dei due titoli sia  $\rho = 0$ .

Fra le composizioni di portafoglio del tipo  $I = \alpha I_1 + (1 - \alpha) I_2$ , si determini il portafoglio efficiente  $\alpha'$  che ha rendimento atteso  $E' = 5.5\%$  e se ne determini la varianza del rendimento  $V'$ .

Quindi, si trovi il portafoglio efficiente  $\alpha''$  che ha varianza del rendimento  $V'' = 0.025$  e se ne determini il rendimento atteso  $E''$ .

Si trovi infine il portafoglio a varianza minima  $\alpha^*$  e se ne calcoli il rendimento atteso  $E^*$  e la varianza del rendimento  $V^*$ .

### Esercizio 26

Si consideri un mercato in cui siano presenti solo due titoli, il primo con rendimento atteso  $E_1 = 4\%$  e varianza  $V_1 = 0.04$ , il secondo con rendimento atteso  $E_2 = 3.1\%$  e varianza  $V_2 = 0.02$ . Vi è totale assenza di correlazione tra i due titoli.

Si supponga di investire in un portafoglio fra i due titoli con una percentuale  $\alpha$  del proprio capitale investita nel titolo 1 ed una percentuale  $1 - \alpha$  nel titolo 2. Si determini, nell'ipotesi che siano permesse vendite allo scoperto, la percentuale  $\alpha^*$  tale per cui risulta minima la varianza del portafoglio così costruito e si determini il rendimento atteso  $E^*$  e la varianza  $V^*$  di tale portafoglio.

Si risponda alla stessa domanda nel caso in cui non siano permesse vendite allo scoperto.

Si determinino infine rendimento atteso e varianza del portafoglio composto da una quota  $\alpha_0$  del primo titolo e una quota  $1 - \alpha_0$  del secondo sapendo che il rapporto tra le due quote è pari al rapporto tra le rispettive varianze.

Si calcoli la varianza  $V'$  del portafoglio efficiente con media  $E' = 5\%$ .

Si calcoli infine la media  $E''$  del portafoglio efficiente con varianza  $V'' = 0.015$ .

### Esercizio 27

Si consideri il problema dell'investimento in un mercato in cui siano presenti solo due titoli, il primo con rendimento medio annuo  $E_1 = 5\%$  e varianza  $V_1 = 0.06$ , il secondo con rendimento medio annuo  $E_2 = 3\%$  e varianza  $V_2 = 0.04$ , la correlazione fra i due titoli sia  $\rho = 0.85$ .

Si supponga di investire in un portafoglio fra i due titoli con una percentuale  $\alpha$  del proprio capitale investita nel titolo 1 ed una percentuale  $1 - \alpha$  nel titolo 2.

Si determini la media e la varianza del rendimento aleatorio di un portafoglio costruito investendo il 30% della propria ricchezza nel titolo 1 ed il rimanente 70% nel titolo 2.

Si determini, sotto l'ipotesi che siano permesse vendite allo scoperto fra i due titoli, la percentuale  $\alpha^*$  tale per cui risulta minima la varianza del portafoglio così costruito e si determini la media  $E^*$  e la varianza  $V^*$  di tale portafoglio.

Si risponda infine alla stessa domanda nel caso in cui non siano permesse vendite allo scoperto fra i due titoli.

### Esercizio 28

Si consideri un mercato azionario in cui siano quotati due titoli  $I_1$  e  $I_2$  con rendimenti attesi  $E_1 = 10\%$ ,  $E_2 = -1\%$  e varianze  $V_1 = 0.05$ ,  $V_2 = 0.01$ . La correlazione fra i due titoli sia  $\rho = 0.4$ . Fra le composizioni di portafoglio del tipo  $I = \alpha I_1 + (1 - \alpha) I_2$ , si calcoli la composizione  $\alpha^*$  del portafoglio a varianza minima, il rendimento atteso  $E^*$  e la varianza  $V^*$  di tale portafoglio.

Si calcoli poi la composizione  $\alpha$  dei due titoli che permette di avere una varianza pari a  $V_2$  ma un rendimento maggiore di  $E_2$ , e si calcoli tale rendimento  $E$ .

### Esercizio 29

Si consideri un mercato azionario in cui siano quotati due titoli rischiosi  $I_1$  e  $I_2$  con rendimenti attesi  $E_1 = 10\%$ ,  $E_2 = 3\%$  e varianze  $V_1 = 0.05$ ,  $V_2 = 0.012$ . La correlazione fra i due titoli sia nulla. Fra le composizioni di portafoglio del tipo  $I = \alpha I_1 + (1 - \alpha) I_2$ , si calcoli la composizione  $\alpha^*$  del portafoglio a varianza minima, il rendimento atteso  $E^*$  e la varianza  $V^*$  di tale portafoglio.

Si calcoli poi il rendimento atteso  $E_P$  e la deviazione standard  $\sigma_P$  di un portafoglio  $P$  composto per metà dal titolo  $I_1$  e per l'altra metà dal titolo  $I_2$ .

### Esercizio 30

In un mercato composto da due titoli rischiosi, la frontiera delle opportunità nel piano media-varianza  $(E, V)$  ha equazione

$$V = E^2 - 0.02E + 0.01 .$$

Si calcoli la media  $E^*$  e la varianza  $V^*$  del portafoglio a varianza minima.

## Soluzione di alcuni esercizi

1.  $\alpha^* = 22.22\%$ ;  $V^* = 0.014667$ ;  $E^* = 2.778\%$ ;  $\alpha_2 = 44.44\%$ ;  $E_2 = 4.56\%$ . Non possibile ottenere tale portafoglio in quanto la frontiera delle opportunità con due titoli rischiosi prevede un solo titolo con una data media assegnata.

5.  $\alpha = 75\%$ ,  $V = (13.23\%)^2$ ,  $V' = (12.73\%)^2$ .

6.  $\alpha^* = -104.55\%$ . Senza vendite allo scoperto,  $\alpha^* = 0$ .  $\rho' = -0.73$ .

11.  $\mu = 2.60\%$ ;  $\rho = -0.85455$ ;  $\sigma = 3.6878\%$ .

25.  $\alpha'' \approx 60.36\%$ .

27.  $E = 3.6\%$ ,  $V = 0.0425$ .  $\alpha^* \approx -9.82\%$ ,  $E^* \approx 2.80\%$ ,  $V^* \approx 0.0398$ . Senza vendite allo scoperto,  $\alpha^* = 0$ ,  $E^* = 3\%$ ,  $V^* = 0.04$ .

28.  $\alpha^* \simeq 2.51\%$ ;  $E^* \simeq -0.72\%$ .  $\alpha = 2\alpha^*$ ,  $E \simeq -0.44\%$ .

- Questo testo è fornito per uso personale degli studenti. Viene reso disponibile in forma preliminare, a supporto della preparazione dell'esame di Matematica Finanziaria.
- Sono consentite la riproduzione e la circolazione in formato cartaceo o elettronico ad esclusivo uso scientifico, didattico o documentario, purché il documento non venga alterato in alcun modo sostanziale, ed in particolare mantenga le corrette indicazioni di data, paternità e fonte originale.
- Non è consentito l'impiego di detto materiale a scopi commerciali se non previo accordo.
- È gradita la segnalazione di errori o refusi.

© Claudio Pacati e Roberto Renò.