

# Istituzioni di Analisi Superiore n. 1

Programma svolto nell'a.a. 2020–2021

Prof. Lorenzo D'Ambrosio

## Analisi reale

**1. Teoria della misura e dell'integrazione astratta:**  $\sigma$ -algebre, insiemi misurabili, funzioni misurabili – proprietà elementari della misura – integrazione di funzioni positive e di funzioni a valori complessi – proprietà di convergenza per successioni di integrali: teoremi di Beppo Levi, di Fatou, di Lebesgue – serie di integrali – completamento di una misura – teorema di Severini–Egoroff – teorema di passaggio al limite di Vitali.

**2. Misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^N$ :** pluriintervalli, misura esterna di Lebesgue, misura interna di Lebesgue – insiemi misurabili secondo Lebesgue – esistenza di insiemi non misurabili secondo Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$  – misure boreliane invarianti per traslazione – misura di Lebesgue e applicazioni lineari: l'interpretazione geometrica del determinante di una matrice.

**3. Gli spazi  $L^p$ :** disuguaglianze di Jensen, di Hölder e di Minkowsky – completezza degli spazi  $L^p(\mu)$  – proprietà di continuità delle funzioni misurabili in  $\mathbb{R}^k$ : il teorema di Lusin – proprietà di densità negli spazi  $L^p(\mathbb{R}^k)$  delle funzioni continue a supporto compatto –  $C_0(\mathbb{R}^k)$  come completamento in norma uniforme di  $C_c(\mathbb{R}^k)$ .

**4. Teoria elementare degli spazi di Hilbert:** definizione, disuguaglianza di Schwarz, disuguaglianza triangolare – teorema di minima norma per convessi chiusi – teorema dei proiettori ortogonali – teorema di rappresentazione di Riesz dei funzionali su uno spazio di Hilbert – problema della migliore approssimazione – insiemi ortonormali – caratterizzazione degli insiemi ortonormali massimali, esistenza di insiemi ortonormali massimali – identità di Bessel, identità di Parseval, isomorfismo tra  $H$  e  $l^2(A)$  – lo spazio  $L^2(T)$  e le serie di Fourier – gli spazi  $H^s(T)$  e  $H^s(T^n)$ , e relativi teoremi di immersione in  $C(T)$ ,  $C(T^n)$  – applicazioni alle equazioni differenziali e disuguaglianza isoperimetrica nel piano.

## Analisi complessa

**5. Introduzione alla teoria delle funzioni olomorfe:** derivabilità in senso complesso: proprietà, interpretazione geometrica – olomorfia e differenziabilità – equazioni di Cauchy–Riemann e corollari – alcune funzioni elementari: funzione esponenziale, funzioni trigonometriche, funzioni poldrome e loro selezioni, funzione logaritmo, funzione potenza – richiami su curve, cammini e circuiti, sulle forme differenziali, omotopia, semplice connessione, relazioni tra chiusura ed esattezza di una forma differenziale – integrazione di funzioni complesse su cammini – primitive di funzioni complesse – forme differenziali associate a una funzione olomorfa – caratterizzazione dell'esistenza di primitive – teorema fondamentale del calcolo integrale in  $\mathbb{C}$  – serie di potenze complesse: raggio di convergenza, convergenza uniforme, teorema di Cauchy–Hadamard – test di Abel–Dirichlet – teorema di Abel – funzioni analitiche

**6. Teorema di Cauchy e analiticità delle funzioni olomorfe:** analiticità dell'integrale *a la* Cauchy – indice di una curva – teorema dell'indice – teorema di Goursat – teorema di Cauchy in un convesso (esistenza locale di primitiva) – formule di Cauchy in un convesso – analiticità delle funzioni olomorfe – invarianza per omotopia di integrali di funzioni olomorfe – teorema di Morera – formule di rappresentazione di Cauchy per derivate – stime di Cauchy per le derivate – teorema fondamentale dell'algebra – teorema di Liouville per funzioni olomorfe limitate e sue generalizzazioni – teorema di Morera–Weierstrass – applicazioni al calcolo di integrali.

**7. Teorema degli zeri e funzioni armoniche:** teorema degli zeri di una funzione olomorfa e corollari – unicità del prolungamento analitico – caratterizzazione dell'analiticità di funzioni di variabile reale – risoluzioni di equazioni differenziali per serie – funzioni olomorfe e funzioni armoniche – funzioni armoniche e loro caratterizzazioni attraverso il loro valor medio – teorema di Pizzetti – teorema di Liouville per funzioni armoniche positive e sue estensioni – principio di massimo per funzioni armoniche – principio del massimo modulo, principio del minimo modulo e loro conseguenze.

**8. Teorema dei residui e applicazioni:** serie di Laurent – teorema sulla sviluppabilità in serie di Laurent – singolarità isolate – classificazione delle singolarità isolate e loro caratterizzazioni – teorema di Picard (enunciato) – definizione di residuo – calcolo del residuo in un polo – teorema dei residui e corollari – funzioni meromorfe – teorema dell'indice logaritmico – teorema di Rouché e corollari – teorema dell'applicazione aperta – teorema dell'invertibilità locale – metodi di sommazione – criteri di Abel per integrali – lemmi di Jordan – applicazioni degli integrali di Cauchy al calcolo di integrali di variabile reale e serie – integrali di Fourier – risoluzione di equazioni alle differenze.

Testi consigliati

Per tutto il programma:

W. RUDIN – **Analisi reale e complessa** – Ed. Boringhieri

Per la sola costruzione della misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^k$ :

N. FUSCO, P. MARCELLINI & C. SBORDONE – **Analisi Matematica due** – Ed. Liguori

Per l'analisi complessa è utile consultare

G. GILARDI – **Analisi 3** – Ed. Mc Graw-Hill

S. LANG – **Complex Analysis** – Ed. Springer-Verlag

Si vedano, inoltre, le dispense distribuite a lezione