Argomenti trattati a lezione durante l'AA 2020/21

Obiettivi del corso. Necessità di una teoria dell'integrazione differente da quella elementare. Introduzione alla teoria per funzioni di variabile complessa che tiene conto della struttura algebrica.

Analisi reale

1. Teoria della misura e dell'integrazione astratta: Definizione di sigma-algebra. Confronto con la topologia. Definizione di funzione misurabile.
Confronto con la continuità. Sigma-algebre generate da famiglie di sottoinsiemi. Sigma-algebra di Borel.

Funzioni boreliane. Criterio per la misurabilità di funzioni numeriche. Richiami su minimo limite e massimo limite. Misurabilita' del limite di funzioni misurabili. Funzioni semplici.

Approssimazioni di funzioni misurabili tramite funzioni semplici. Definizione di misura. Proprietà elementari delle misure. Misura che conta i punti. Delta di Dirac. Definizione di integrale di Lebesgue per funzioni positive.

Prime proprieta' dell'integrale di Lebesgue. Teorema di Beppo Levi. Integrali e serie di funzioni positive. Misure indotte da funzioni positive misurabili.

Esempi e controesempi su misure indotte. Somma di infiniti numeri. Serie come integrali.

Lemma di Fatou. Integrazione di funzioni a valori complessi. Disuguaglianza triangolare. Teorema della convergenza dominata di Lebesgue. Esempi e controesempi. Ruolo degli insiemi di misura nulla

Misure complete e completamento di una misura. Generalizzazione del teorema di convergenza dominata. Passaggio al quoziente di L^1 attraverso la relazione q.o. L'integrale come norma in L^1. Esempi e applicazioni.

Assoluta continuita' delle misure. Assoluta continuita' dell'integrale di Lebesgue. Localilazzazione delle funzioni di L^1. Convergenza quasi uniforme. Teorema di Severini Egorov. Equintegrabilita' di una famiglia di funzioni.

Teorema di Vitali.

2. Misura di Lebesgue in R^N:
Richiami sulla misura di Peano-Jordan.
Condizioni necessarie per la definizione della misura di Lebesgue. Definizione di misura per aperti e compatti.

Misura interna e misura esterna. Definizione di insieme limitato misurabile. Misurabilita' degli aperti limitati e dei compatti. Numerabile subadditivita' della misura di Lebesgue sugli aperti e delle misura esterna. Confronti con la misura di Peano-Jordan. I limitati misurabili sono chiusi rispetto alle operazioni insiemistiche finite.

Numerabile additività per limitati misurabili. Definizione generale di insiemi misurabili secondo Lebesgue e la loro relativa misura. Compatibilità con le altre definizioni. Regolarità della misura di Lebesgue. Caratterizzazione degli insiemi misurabili.

Misure invarianti per traslazione e loro caratterizzazione. Misura di Lebesgue e applicazioni lineari: interpretazione geometrica del determinante di una applicazione.

Esistenza di insiemi non misurabili secondo Lebesgue. Cardinalta' delle sigma algebre dei boreliani dei misurabili e delle parti di R^N. Costruzione dell'insieme di Cantor.

3. Gli spazi L^p:
Lemma di Uryshon. Teorema di Lusin.

Conseguenze del teorema di Lusin. I tre principi di Littlewood. Richiami sulle funzioni convesse. Disuguaglianza di Jensen.

Disuguaglianza di Holder. Disuguaglianza di Minkowski. Estremo superiore essenziale. Spazi L^p. Disuguaglianza di Holder e Minkowski in L^p. Completezza di L^∞.

Completezza di L^p. Densita’ delle funzioni semplici in L^p. Densita’ delle funzioni continue a supporto compatto in $L^p(R^N)$. Il completamento di $C_c(R^N)$ nella norma infinito. Relazion tra spazi L^p.

Spazi l^p. Generalizzazione della disuguaglianza di Holder. Separabilita’ degli spazi L^p. Cenni al teorema di rappresentazione di Riesz per funzionali positivi.

4. Teoria elementare degli spazi di Hilbert:
Prodotti scalari e loro proprieta’ (disuguaglianza di Schwarz, triangolare). Spazi di Hilbert: definizione ed esempi.
Spazi ortogonali. Teorema di Pitagora. Identita’ del parallelogramma. Identita’ di polarizzazione. Teorema di minima norma.

Teorema dei proiettori ortogonali. Teorema di rappresentazione di Riesz. Problema della miglior approssimazione. Sistemi ortonormali e coefficienti di Fourier. Disuguaglianza di Bessel. Caratterizzazione degli insiemi ortonormali massimali. Esistenza di sistemi ortonormali massimali. Identita’ di Bessel e di Parseval. Isomorfismo tra H e $l^2(A)$. Separabilita’ dello spazio e numerabilita’ delle basi di Hilbert.

Lo spazio $L^2(T)$. Il sistema ortonormale trigonometrico: Densita’ dei polinomi trigonometrici nelle funzioni continue periodiche e in $L^2(T)$. Teorema di Weierstrass di approssimazione delle funzioni continue. Derivata debole attraverso i coefficienti di Fourier. Lo spazio $H^1(T)$: definizione, completezza e una sua base di Hilbert.

Spazi $H^k(T)$: definizioni, proprieta’ (completezza, basi, norme equivalenti). Spazi $H^s(T)$, ad esponente frazionario: definizioni, proprieta’ (completezza, basi, norme equivalenti). Disuguaglianza di Wirtinger. Teorema di Immersione di $H^s(T)$ in $C^k(T)$.

Applicazioni della teoria di spazi di Hilbert: problema isoperimetrico nel piano.

Applicazioni della teoria di spazi di Hilbert alle equazioni differenziali ordinarie: soluzioni deboli e loro regolarità. Cenni di applicazioni alle equazioni alle derivate parziali. Applicazioni della teoria di spazi di Hilbert: soluzione dell’equazione del calore su un anello.

Analisi complessa

5. Introduzione alla teoria delle funzioni olomorfe:
Richiami sui numeri complessi, aspetti algebrici e topologici. Successioni e serie in ambito complesso. Continuità delle funzioni complesse di variabile complessa. Esempi ed esercizi.

Olomorfia. Raffronto tra la differenziabilità e la derivabilità in senso complesso. Condizioni di Cauchy-Riemann.

Prime conseguenze delle condizioni di Cauchy-Riemann. Funzioni multivoche. Funzione argomento e sue selezioni. Proprieta’ della funzione esponenziale, Logaritmo e sue selezioni, funzioni seno e coseno con le loro inverse. Mappe conformi.

Interpretazione geometrica della derivata complessa. Rappresentazione conforme delle funzioni complesse. Richiami: curve, cammini orientati, forme differenziali e loro integrazione. Definizione di integrale lungo un cammino orientato e sue relazioni con le forme differenziali. Proprieta' degli integrali.

Relazioni tra integrali e primitiva. Esistenza di funzioni olomorfe prive di primitiva. Esercizi. Richiami sulle serie di funzioni. Serie di potenze in campo complesso: Insieme di convergenza, raggio di convergenza, convergenze assoluta e uniforme.

Olomorfia delle serie di potenze. Analiticità e olomorfia. Unicità dei coefficienti per serie di potenze. Serie geometrica. Somma per parti, test Abel Dirichlet. e Teorema di Abel. Esercizi sulle serie di potenze. Sommazione e integrazione secondo Abel. Integrazione rispetto ad un nucleo. Integrazione a valor principale.

6. Teorema di Cauchy e analiticità delle funzioni olomorfe:
Analiticità degli integrali a la Cauchy. Teorema dell'indice di avvolgimento. Teorema di Goursat.

Teorema di esistenza di una primitiva di una funzione olomorfa in un convesso. Teorema di rappresentazione di Cauchy in un convesso. Analiticita' delle funzioni olomorfe. Teorema di Morera. Circuiti omotopi. Invarianza degli integrali di funzioni olomorfe per omotopia.

Esistenza di primitive su insiemi semplicemente connessi. Esercizi. Formule di Cauchy per funzioni olomorfe su un aperto qualsiasi. Stime per le derivate di una funzione olomorfa. Teorema di Liouville e sue generalizzazioni. Teorema fondamentale dell'algebra.

Teorema di Morera-Weierstrass per successioni e per serie. Esercizi sugli integrali di funzioni olomorfe.

7. Teorema degli zeri e funzioni armoniche:
Teorema degli zeri di funzioni olomorfe.

Teorema di unicita' del prolungamento olomorfo. Esempi. Caratterizzazione dell'analiticita' delle funzioni di variabile reale attraverso le stime sulle derivate e come traccia reale di funzioni olomorfe.
Funzioni armoniche. Relazione tra funzioni armoniche e funzioni olomorfe. Teorema di Pizzetti. Caratterizzazione delle funzioni armoniche tramite il valore medio.

Principi di massimo per funzioni armoniche. Teoremi di Liouville per funzioni armoniche. Disuguaglianza di Harnack. Teorema di Liouville per funzioni olomorfe. Principi di minimo e massimo modulo per funzioni olomorfe.

8. Teorema dei residui e applicazioni:
Serie di Laurent. Sviluppabilita' in serie di Laurent. Esercizi sul calcolo della serie di Laurent.

Singolarita' isolate e loro classificazione. Esempi. Caratterizzazione dell'esistenza delle primitive attraverso i residui.

Caratterizzazione delle singolarita' eliminabili. Caratterizzazione dei poli. Caratterizzazione delle singolarita' essenziali. Esempi. Teorema di Picard (solo enunciato). Teorema dei residui. Funzioni meromorfe. Teorema dell'indice logaritmico. Teorema di Rouche'.

Continuità delle radici di un polinomio rispetto ai coefficienti. Teorema della mappa aperta, teorema di risolubilita' locale.
Esercizi sul calcolo della serie di Laurent e dei residui. Calcolo di integrali di funzioni razionali di trigonometriche attraverso i residui.
Richiami sulle relazioni tra integrali di Lebesgue, impropri e a valor principale. Lemmi di Jordan. Applicazioni del teorema dei residui al calcolo di integrali reali, trasformata di Fourier, calcolo della somma di una serie.