4.2.1 Test Abel-Dirichelet

Proposizione 4.17 (somma per parti) *Siano $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Conveniamo di denotare con $B_n := b_0 + b_1 + \ldots + b_n$ e $B_{-1} := 0$ allora per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = a_n B_n - a_m B_{m-1} - \sum_{k=m}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k) \tag{4.1}$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = (B_n - B_m) a_n + a_m b_m - \sum_{k=m}^{n-1} (B_k - B_m)(a_{k+1} - a_k) \tag{4.2}$$

Dim. Sia $m = 0$. In tal caso $B_{-1} = 0$. Dimostriamo per induzione su n.

Sia $n = 1$:

$$\sum_{k=0}^{1} a_k b_k = a_0 b_0 + a_1 b_1 = a_1 (b_0 + b_1) - a_1 b_0 + a_0 b_0 = a_1 B_1 - a_0 B_{m-1} - B_0 (a_1 - a_0).$$

Supponiamo ver per n,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k + a_{n+1} b_{n+1} = a_n B_n - \sum_{k=m}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k) + a_{n+1} b_{n+1} = \\ a_n B_n - \sum_{k=m}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k) + a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+1} B_n - a_{n+1} B_n = \\ (a_n - a_{n+1}) B_n - \sum_{k=m}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k) + a_{n+1} (b_{n+1} + B_n) = \\ a_{n+1} B_{n+1} - a_0 B_{-1} - \sum_{k=0}^{n} B_k (a_{k+1} - a_k) \end{aligned}$$

Per $m > 0$ la tesi segue per sottrazione di $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k - \sum_{k=0}^{m-1} a_k b_k$.

Da (4.1) sommando e sottraendo a secondo membro $\sum_{k=m}^{n-1} B_m (a_{k+1} - a_k)$ □

Teorema 4.18 *Sia a_n succesisone di numeri reali positivi infinitesima e decrescente e sia b_n successione di numeri complessi le cui somme parziali sono limitate da $C > 0$ ($|B_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ è convergente.*

Inoltre se S è la sua somma abbiamo la seguente stima sull'errore commesso:

$$\left| S - \sum_{j=0}^{m} a_j b_j \right| \leq 2 C a_{m+1}.$$

Dim. Usiamo il criterio di Cauchy per le serie: $n > m \in \mathbb{N}$ e usando la (4.1)

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| \leq a_n C + a_m C + \left|\sum_{k=m}^{n-1} B_k(a_{k+1} - a_k)\right| \leq a_n C + a_m C + C\sum_{k=m}^{n-1}(a_k - a_{k+1})$$
$$= a_n C + a_m C + C(a_m - a_n) = C2a_m.$$

e poiché a_m è infinitesima otteniamo la tesi. □

Esempio 4.19 *Teorema di Leibniz*

Corollario 4.20 *Sia X un insieme. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $a_n : X \to \mathbb{R}$ funzione nonnegativa, $a_n(x) \geq 0$ e per ogni $x \in X$ la successione $(a_n(x))_n$ sia decrescente e $a_n \to 0$ uniformemente. Sia $b_n : X \to \mathbb{C}$ tale che per ogni $x \in X :\ |B_n(x)| \leq C$. Allora $\sum a_n(x)b_n(x)$ converge uniformemente e detta $S : X \to \mathbb{C}$ la sua somma risulta*

$$\left|S(x) - \sum^{n} a_j b_j\right| \leq 2Ca_{n+1}(x).$$

Corollario 4.21 *Sia X un insieme. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $a_n : X \to \mathbb{R}$ funzione tale che per ogni $x \in X$ la successione $(a_n(x))_n$ sia monotona e a_n uniformemente limitata. Sia $b_n : X \to \mathbb{C}$ tale che $\sum^{\infty} b_n$ sia uniformemente convergente.*

Allora $\sum a_n(x)b_n(x)$ converge uniformemente.

Dim. Sia $C > 0$ tale che $|a(x)| \leq C$ per ogni $x \in X$. Supponiamo che $a_n(x)$ sia monotona crescente (l'altro caso è analogo)

Usando il criterio di Cauchy fissiamo $\varepsilon > 0$. Poichè $\sum_n b_n$ converge uniformemente abbiamo che (per il criterio di Cauchy) per m sufficentemente grande e per ogni $n > m$ si ha che $||B_n - B_m||_\infty < \varepsilon$ e $||b_n||_\infty < \varepsilon$.

Da (4.2)

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(x)b_k(x)\right| &\leq |a_n(x)|\,||B_n - B_m||_\infty + |a_n(x)|\,|b_n(x)| + \sum_{k=m}^{n-1}|B_k - B_m|\,|a_{k+1} - a_k| \\ &\leq C\varepsilon + C\varepsilon + \sum_{k=m}^{n-1}\varepsilon(a_{k+1} - a_k) \leq 2C\varepsilon + \varepsilon(a_n(x) - a_m(x)) \leq 4C\varepsilon\end{aligned}$$

□

Teorema 4.22 (Abel) *Supponiamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sia convergente. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ converge uniformemente su $[0,1]$.*

Detta $f(t)$ la sua somma risulta:

$$\lim_{t\to 1^-} f(t) = \lim_{t\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$