Esercizi di Analisi Reale

Lorenzo D'Ambrosio

October 24, 2021

Gli esercizi che sono sottolienati ed in maiuscolo, come ad esempio

ESERCIZIO 0.1. *Si dimostri che ...*

indica che l'esercizio è importante e verrá utilizzato durante le lezioni. Tali esercizi non presentano alcuna difficoltá.

Gli esercizi indicati con un asterisco, come ad esempio

***Esercizio 0.2.** ....

rappresentano (ai fini del corso) delle curiositá che esulano dalle principali tematiche del corso.

1 σ-algebre e misure

Definition 1.1. *Let $(X, \mathcal{M})$ be a measurable space. We say that $\mathcal{M}_0$ is a* a sub-σ-algebra *of $\mathcal{M}$ if $\mathcal{M}_0$ is a σ-algebra on X and $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$.*

ESERCIZIO 1.2. *Let $(X, \mathcal{M})$ be a measurable space and $Y \subset X$. Let $\mathcal{M}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{M}\}$.*

1. *Si dimostri che $\mathcal{M}_Y$ é una σ-algebra su Y.*
2. *Inoltre se Y è misurabile, allora $\mathcal{M}_Y \subset \mathcal{M}$.*
3. *Per quali Y, risulta che $\mathcal{M}_Y$ è una sotto-σ-algebra di $\mathcal{M}$.*

Exercise 1.3. *Let $(\mathcal{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of σ-algebras of subsets of a set X. Show that*

1. *If $(\mathcal{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is decreasing by inclusion (i.e. $\mathcal{M}_{n+1} \subset \mathcal{M}_n$), then $\cap_n \mathcal{M}_n$ is a σ-algebra.*
2. *If $(\mathcal{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is increasing by inclusion (i.e. $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{n+1}$), then $\cup_n \mathcal{M}_n$ need not be a σ-algebra by constructing an example.*

Exercise 1.4. *Si dimostri con un esempio che, in generale, una unione piú che numerabile di insiemi misurabili, puó non essere misurabile.*

ESERCIZIO 1.5. *Sia X spazio misurabile ed $E \subset X$. Si dimostri che E è misurabile se e solo se la sua funzione caratteristica, χ_E, è una funzione misurabile.*

ESERCIZIO 1.6. *Let $(X, \mathcal{M})$ be a measurable space. Let $(E_n)_n \subset \mathcal{M}$. Show that there exists a disjoint sequence $(F_n)_n \subset \mathcal{M}$ such that for every $k \in \mathbb{N}$ we have $\bigcup_{n=1}^k F_n = \bigcup_{n=1}^k E_n$ and $\bigcup_{n=1}^\infty F_n = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$.*

Exercise 1.7. *Prove that if f is a real function on a measurable space X such that $\{x \in X : f(x) \geq r\}$ is measurable for every rational r, then f is measurable.*

What if we replace "$\geq$" with "$>$"?

ESERCIZIO 1.8. *Si dimostri che la funzione parte intera, definita come* $[x] := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$, *è boreliana.*

Exercise 1.9. *Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *e* $t \geq 0$ *definiamo* $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *come* $f_n(t) := \frac{[2^N t]}{2^n}$. *Se scrivessimo i numeri* t *e* $f_n(t)$ *in base 2, cosa rappresenta* $f_n(t)$*?*

ESERCIZIO 1.10. *Let* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *be a measure space. Let* $\mathcal{M}_0$ *be a sub-*σ*-algebra of* $\mathcal{M}$*, that is,* $\mathcal{M}_0$ *is a* σ*-algebra on* X *and* $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$. *Show that the restriction of* μ *to* $\mathcal{M}_0$ *is a measure on* $\mathcal{M}_0$.

ESERCIZIO 1.11. *Let* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *be a measure space and* $Y \subset X$ *measurable. Let* $\mathcal{M}_Y$ *be the* σ*-algebra induced on* Y *defined in Exercise 1.2. Let* μ_Y *be the restriction of* μ *to* $\mathcal{M}_Y$. *Show that* $(Y, \mathcal{M}_Y, \mu_Y)$ *is a measure space.*

ESERCIZIO 1.12. *Let* μ_1 *and* μ_2 *be measures on a* σ*-algebra* $\mathcal{M}$ *of subsets of a set* X *and let* $a, b \geq 0$ *be nonnegative numbers. Show that the set function* $a\mu_1 + b\mu_2$ *on* $\mathcal{M}$ *defined for* $E \in \mathcal{M}$ *by setting* $(a\mu_1 + b\mu_2)(E) := a\mu_1(E) + b\mu_2(E)$ *is a measure on* $\mathcal{M}$.

Ricordiamo che dati due insiemi A, B definiamo la differenza simmetrica di A e B come

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

***Esercizio 1.13**. *Let* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *be a finite measure space. Define the function* $\rho : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *by* $\rho(A, B) := \mu(A \Delta B)$ *for* $A, B \in \mathcal{M}$.

1. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$
2. $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B)$
3. ρ *need not be a metric on the set* $\mathcal{M}$*, that is* $\rho(A, B) = 0$ *does not imply* $A = B$.

Let $\approx$ *be a relation among the members of* $\mathcal{M}$*, defined by writing* $A \approx B$ *when* $\mu(A \Delta B) = 0$.

4. *Show that* $\approx$ *is an equivalence relation on* $\mathcal{M}$.

Let $[A]$ *be the equivalence class to which* A *belongs and let* $[\mathcal{M}]$ *be the collection of all the equivalence classes with respect to the equivalence relation* $\approx$. *Define a function* ρ^* *on* $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ *by setting* $\rho^*([A], [B]) = \mu(A \Delta B)$ *for* $[A], [B] \in [\mathcal{M}]$.

5. *Show that* ρ^* *is well defined in the sense that its definition as given above does not depend on the particular representative* A *and* B *of the equivalence classes* $[A]$ *and* $[B]$.
6. *Show that* ρ^* *is a metric on the set* $[\mathcal{M}]$.

ESERCIZIO 1.14. *Let* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *be a measure space and let* $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. *Show that*

$$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) \leq \sum_n \mu(E_n).$$

Exercise 1.15 (Generalizzazione del teorema di Beppo Levi.). *Sia* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *spazio di misura, e per ogni* $n \geq 1$ *sia* $f_n : X \to [0, \infty]$ *una funzione misurabile. Supponiamo che* $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq \ldots$ μ*-q.o. Dimostrare che*

1. $$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_n f_n d\mu. \tag{1}$$
2. *non e' possibile togliere l'ipotesi* $f_n \geq 0$ μ*-q.o. per ogni* n.

3. *Se $f_1 \in L^1(X,\mu)$, allora si può togliere l'ipotesi $f_n \geq 0$ μ-q.o. per ogni n.*

Exercise 1.16 (Teorema di Beppo Levi per successioni decrescenti). *Sia $(X,\mathcal{M},\mu)$ spazio di misura, e per ogni $n \geq 1$ sia $f_n : X \to [0,\infty]$ una funzione misurabile. Supponiamo che $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n \geq \dots$ μ-q.o. Dimostrare che*

1. *In generale non vale la relazione* (1)

2. *Se $f_1 \in L^1(X,\mu)$, allora sussiste la* (1)

Exercise 1.17. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $(X,\mathcal{M},\mu)$ spazio di misura ed $f : \Omega \times X \to \mathbb{R}$. Supponiamo che*

1. *$\forall t \in \Omega$ risulta $f(t,\cdot) \in L^1(X)$.*

2. *Per μ-q.o. $x \in X$ la funzione $f(\cdot,x)$ è derivabile.*

3. *Esiste $g_1 \in L^1(X)$ tale che $|\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)| \leq g_1(x)$ per ogni $t \in \Omega$ e per μ-q.o. $x \in X$.*

Definiamo

$$F(t) := \int_X f(t,x)d\mu(x) \quad \textit{per } t \in \Omega.$$

Si dimostri che F è derivabile e risulta $F'(t) = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)d\mu(x)$.

Si usi il precedente esercizio per il seguente in cui la misura sottointesa su K è la misura di Lebesgue.

Exercise 1.18. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $K \subset \mathbb{R}^p$ compatto, ed $f : \Omega \times K \to \mathbb{R}$ continua e definiamo $F(t) := \int_K f(t,x)dx$ per $t \in \Omega$.*
Si dimostri che

1. *$F : \Omega \to \mathbb{R}$ è continua.*

2. *Se f è continua con le sue derivate rispetto a $t \in \mathbb{R}^n$ fino all'ordine h, allora F è di classe $C^h(\Omega)$ e per ogni operatore differenziale D_t di ordine minore o uguale di h, risulta che $D_t F(t) = \int_X D_t f(t,x)dx$.*

Exercise 1.19. *Sia $A := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ numero algebrico}\}$. Quanto vale la misura di Lebesgue di A?*

ESERCIZIO 1.20. *Sia $(a_n)_n$ una successioe di numeri reali $a_n \geq 0$ e supponiamo che la serie di potenze $f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ converga per $0 < t < 1$. Si dimostri che il limite $\lim_{t\to 1^-} f(t) = S \in \mathbb{R}$ esiste finito se e solo se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente. In tal caso risulta*

$$\lim_{t\to 1^-} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

ESERCIZIO 1.21.