Gli spazi $H^s(T)$ e $H^s(T^N)$

Come di consueto, indicheremo con T la circonferenza unitaria $\{z : |z| = 1\}$. Il cambio di variabile $z = e^{it}, t \in [-\pi, \pi]$ permette di identificare le funzioni $F : T \to \mathbb{C}$ come funzioni periodiche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π–periodiche, ovvero

$$F(z) = F(e^{it}) = f(t)\,.$$

Indicheremo ancora con dx la misura di Lebesgue divisa per 2π. Gli spazi $L^p(T)$ sono definiti nel modo usuale:

$$L^p(T) = \left\{F : T \to \mathbb{C} \text{ misurabili } : \|F\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < \infty\right\} \quad 1 \le p < \infty\,;$$

$$L^\infty(T) = \left\{F : T \to \mathbb{C} \text{ misurabili } : \|F\|_\infty = \sup_{[-\pi,\pi]} \text{ess}\,|f(x)| < \infty\right\}.$$

Ovviamente, essendo le funzioni di L^p definite quasi ovunque, la condizione di periodicità è vuota, per cui gli spazi $L^p(T)$ sono isomorfi in modo naturale agli spazi $L^p([-\pi, \pi])$.

Come è noto, $L^2(T)$ è uno spazio di Hilbert, e le funzioni di $L^2(T)$ sono sviluppabili in serie di Fourier: le funzioni $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ costituiscono un sistema ortonormale massimale di $L^2(T)$ e, posto

$$\widetilde{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt\,,$$

risulta, nel senso di $L^2(T)$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(n)e^{inx}\,.$$

Sappiamo, inoltre, che $L^2(T)$ è isomorfo allo spazio l^2, dove $l^2 = L^2(\mathbb{Z}, \mu)$, essendo μ la misura che conta i punti.

Sia ora $f \in C^1(T)$. Un calcolo elementare, mediante un'integrazione per parti, mostra che

$$\widetilde{f'}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-int}\,dt = in \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt = in\widetilde{f}(n)\,,$$

il che significa che la serie di Fourier della derivata di una funzione $f \in C^1(T)$ si ottiene derivando (formalmente) termine a termine la serie di Fourier di f.

Questa relazione suggerisce un modo per generalizzare la definizione di derivata di una funzione in $L^2(T)$:

Definizione 1 – Sia $f \in L^2(T)$. Se la successione $n\widetilde{f}(n) \in l^2$, la funzione f si dice *debolmente derivabile*, e la funzione di $L^2(T)$

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} in\widetilde{f}(n)e^{inx} \qquad \text{(nel senso di } L^2(T))$$

prende il nome di *derivata debole* di $f(x)$.

Ovviamente, non tutte le funzioni $f \in L^2(T)$ risultano debolmente derivabili, perchè in generale la condizione $n\widetilde{f}(n) \in l^2$ non è soddisfatta. Inoltre, le nostre considerazioni precedenti mostrano che, se $f \in C^1(T)$, allora f è debolmente derivabile e la sua derivata debole coincide con la sua derivata in senso classico.

Le funzioni di $L^2(T)$ debolmente derivabili costituiscono un sottospazio di $L^2(T)$ molto importante, che indicheremo col simbolo $H^1(T)$. Lo spazio $H^1(T)$ fa parte di una famiglia di spazi denominati *spazi di Sobolev*.

Possiamo dotare $H^1(T)$ di una nuova norma, differente da quella di $L^2(T)$, che per ogni f tenga conto sia di f, sia di f'. Questa nuova norma è indotta da un prodotto scalare; precisamente, definiamo

$$\langle f, g\rangle_{H^1(T)} = \langle f, g\rangle_{L^2(T)} + \langle f', g'\rangle_{L^2(T)} \tag{1}$$

da cui otteniamo

$$\|f\|^2_{H^1(T)} = \|f\|^2_{L^2(T)} + \|f'\|^2_{L^2(T)} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2\,dt\,.$$

Utilizzando le identità di Bessel e Parseval per f, g e f', g' e tenendo conto della relazione $\widetilde{f'}(n) = in\widetilde{f}(n)$, $\widetilde{g'}(n) = in\widetilde{g}(n)$, otteniamo

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle_{H^1(T)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1+n^2)\widetilde{f}(n)\overline{\widetilde{g}(n)}\,; \\ \|f\|^2_{H^1(T)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1+n^2)|\widetilde{f}(n)|^2\,. \end{aligned} \tag{2}$$

È immediato riconoscere, a questo punto, che $H^1(T)$, dotato del prodotto scalare definito dalla (1), è uno spazio di Hilbert: infatti dalla (2) segue che $H^1(T)$ è isomorfo a $L^2(\mathbb{Z}, \mu)$, dove μ è la misura che, nel punto n, vale $(1+n^2)$.

Vale, inoltre, la seguente

Proposizione 1 – *Le funzioni*

$$u_n(x) = \left\{ \frac{1}{(1+n^2)^{1/2}}\, e^{inx} \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \tag{3}$$

costituiscono un sistema ortonormale massimale in $H^1(T)$.

Dim.

Dalla definizione di prodotto scalare in $H^1(T)$ discende immediatamente che il sistema (3) è ortonormale; per mostrare che è massimale, dobbiamo far vedere che la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) u_n(x)$$

converge a $f(x)$ *nel senso di* $H^1(T)$, dove con $\widehat{f}(n)$ abbiamo indicato i coefficienti di Fourier di f rispetto al sistema ortonormale (3), e cioè

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) = \langle f, u_n\rangle_{H^1(T)} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{(1+n^2)^{1/2}}\, e^{-int}\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'(t)}{(1+n^2)^{1/2}}\, (-in) e^{-int}\, dt = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{(1+n^2)^{1/2}}\, e^{-int}\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{(1+n^2)^{1/2}}\, n^2 e^{-int}\, dt = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(1+n^2)^{1/2}\, e^{-int}\, dt = (1+n^2)^{1/2} \widetilde{f}(n)\,.
\end{aligned} \tag{4}$$

Allora, posto

$$s_N(x) = \sum_{|n|\le N} \widehat{f}(n) u_n(x) = \sum_{|n|\le N} \widetilde{f}(n) e^{inx}$$

si ha, usando l'identità di Bessel in $L^2(T)$,

$$\|f - s_N\|^2_{H^1(T)} = \|f - s_N\|^2_{L^2(T)} + \|f' - s'_N\|^2_{L^2(T)} = \sum_{|n|>N} (1+n^2)|\widetilde{f}(n)|^2\,.$$

Ma, dalla (2), abbiamo che l'espressione

$$\sum_{|n|>N} (1+n^2)|\widetilde{f}(n)|^2$$

è il resto N–simo di una serie convergente, e dunque può essere reso arbitrariamente piccolo purchè N sia sufficientemente grande. Ciò mostra che $s_N \to f$ in $H^1(T)$, e quindi il sistema (3) è massimale ■

Il concetto di derivata debole si può estendere, ovviamente, a qualsiasi ordine di derivazione: ad esempio, se f' è a sua volta debolmente derivabile, chiameremo f'' la sua derivata debole. In analogia a quanto visto sinora, definiremo $H^k(T)$ come il sottospazio di $L^2(T)$ costituito dalle funzioni debolmente derivabili k volte. Esso risulta uno spazio di Hilbert se dotato del prodotto scalare (e della relativa norma)

$$\tag{5} \begin{aligned} \langle f, g\rangle_{H^k(T)} &= \langle f, g\rangle_{L^2(T)} + \langle f', g'\rangle_{L^2(T)} + \ldots + \langle f^{(k)}, g^{(k)}\rangle_{L^2(T)} \\ \|f\|^2_{H^k(T)} &= \|f\|^2_{L^2(T)} + \|f'\|^2_{L^2(T)} + \ldots + \|f^{(k)}\|^2_{L^2(T)} \end{aligned}$$

mentre le relazioni analoghe a quelle espresse dalla (2) sono

$$\langle f, g\rangle_{H^k(T)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + n^2 + n^4 + \ldots + n^{2k})\widetilde{f}(n)\overline{\widetilde{g}(n)}\,;$$

$$\|f\|^2_{H^k(T)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + n^2 + n^4 + \ldots + n^{2k})|\widetilde{f}(n)|^2\,.$$

Osserviamo che, fissato k, esiste una costante positiva C_k tale che

$$C_k(1 + n^2)^k \leq (1 + n^2 + n^4 + \ldots + n^{2k}) \leq (1 + n^2)^k\,;$$

pertanto, per ogni $k \in \mathbb{N}$, è possibile definire un'altra norma, equivalente a quella indotta dal prodotto scalare (5) ed essa stessa indotta da un prodotto scalare; precisamente, si può porre

$$\tag{6} \begin{aligned} (f, g)_{H^k(T)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + n^2)^k \widetilde{f}(n)\overline{\widetilde{g}(n)}\,; \\ |||f|||^2_{H^k(T)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + n^2)^k |\widetilde{f}(n)|^2\,. \end{aligned}$$

È dunque perfettamente equivalente dotare $H^k(T)$ di norma e prodotto scalare definiti da (5) o da (6). Le relazioni (6), però, hanno il vantaggio di poter essere estese al caso di un esponente s numero reale positivo al posto di $k \in \mathbb{N}$. Diamo pertanto la seguente

Definizione 2 – Sia $s \geq 0$. Definiamo

$$H^s(T) = \Big\{ f \in L^2(T) : (1 + n^2)^{s/2}\widetilde{f}(n) \in l^2 \Big\}\,.$$

Ovviamente $H^0(T) \equiv L^2(T)$, e $s' < s \Longrightarrow H^s(T) \subset H^{s'}(T)$.

Lo spazio $H^s(T)$ è dotato di prodotto scalare e di norma definiti, per analogia con la (6), nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \langle f,g\rangle_{H^s(T)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1+n^2)^s \widetilde{f}(n)\overline{\widetilde{g}(n)}\,; \\ \|f\|^2_{H^s(T)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1+n^2)^s |\widetilde{f}(n)|^2\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Anche in questo caso è immediato riconoscere che $H^s(T)$ è uno spazio di Hilbert: infatti dalla (7) segue che $H^s(T)$ è isomorfo a $l^2_s = L^2(\mathbb{Z},\mu_s)$, dove μ_s è la misura che, nel punto n, vale $(1+n^2)^s$.

Inoltre, analogamente a quanto visto nella proposizione 1, le funzioni

$$\left\{ \frac{1}{(1+n^2)^{s/2}}\, e^{inx} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

costituiscono un sistema ortonormale massimale in $H^s(T)$.

Diamo ora un teorema di immersione di Sobolev per gli spazi $H^s(T)$.

Teorema 1 – *Sia $s > 1/2$. Allora $H^s(T) \subset C(T)$, ed esiste $C_s < \infty$ dipendente solo da s tale che*

$$\|f\|_\infty \le C_s \|f\|_{H^s} \quad \forall f \in H^s(T)\,.$$

Dim.
Risulta $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(n) e^{inx}$, dove

$$\widetilde{f}(n) = \frac{1}{(1+n^2)^{s/2}} (1+n^2)^{s/2} \widetilde{f}(n)\,.$$

Essendo $s > 1/2$, la successione $\dfrac{1}{(1+n^2)^{s/2}}$ appartiene a l^2; anche la successione $(1+n^2)^{s/2}\widetilde{f}(n)$ appartiene a l^2, per definizione di $H^s(T)$. Pertanto la successione dei coefficienti $\widetilde{f}(n)$ appartiene a l^1, ovvero

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widetilde{f}(n)| < \infty\,.$$

Dal criterio di Weierstrass segue allora che la serie di funzioni $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(n) e^{inx}$ converge uniformemente, e quindi $f \in C(T)$. Inoltre, usando la disuguaglianza di Hölder in l^1,

$$\|f\|_\infty \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widetilde{f}(n)| \le$$

$$\le \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{(1+n^2)^{s/2}}\right)^2\right]^{1/2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left((1+n^2)^{s/2}|\widetilde{f}(n)|\right)^2\right]^{1/2} =$$

$$= C_s\|f\|_{H^s} \qquad \blacksquare$$

Corollario 1 – *Sia $k \in \mathbb{N}$, e $s > k + 1/2$. Allora $H^s(T) \subset C^k(T)$, ed esiste $C_s < \infty$ tale che*

$$\|f\|_{C^k} \le C_s\|f\|_{H^s} \quad \forall f \in H^s(T)\,.$$

Dim.

Basta applicare il teorema 1 alle derivate successive di f sino all'ordine k $\blacksquare$

Diamo ora alcuni cenni sullo spazio $H^s(T^N)$, che generalizza lo spazio $H^s(T)$ al caso di funzioni di N variabili.

Sia dunque T^N il prodotto cartesiano di N copie di T; T^N prende il nome di *toro N–dimensionale*. Analogamente a quanto visto nel caso $N = 1$, le funzioni $F : T^N \to \mathbb{C}$ possono essere riguardate, mediante il cambio di variabile $z_h = e^{ix_h}, h = 1 \dots N$, come funzioni $f : [-\pi, \pi]^N \to \mathbb{C}$, 2π–periodiche in ciascuna delle N variabili reali $x_1 \dots x_N$. Anche in questo caso indicheremo con dx la misura di Lebesgue, ma questa volta divisa per $(2\pi)^N$.

Lo spazio $L^2(T^N)$ è uno spazio di Hilbert, e le funzioni di $L^2(T^N)$ sono sviluppabili in serie di Fourier: le funzioni $\{e^{ih\cdot x}\}_{h\in\mathbb{Z}^N} = \{e^{i(h_1x_1+\ldots+h_Nx_N)}\}_{h\in\mathbb{Z}^N}$ costituiscono un sistema ortonormale massimale di $L^2(T^N)$ e, posto

$$\widetilde{f}(h) = \int_{[-\pi,\pi]^N} f(x)e^{-ih\cdot x}\,dx \qquad h \in \mathbb{Z}^N$$

risulta

$$f(x) = \sum_{h\in\mathbb{Z}^N} \widetilde{f}(h)e^{ih\cdot x}\,.$$

Lo spazio $L^2(T^N)$ è isomorfo allo spazio l^2; conviene pensare a l^2 come $l^2 = L^2(\mathbb{Z}^N, \mu)$, essendo μ la misura che conta i punti.

Definiamo ora gli spazi di Sobolev $H^s(T^N)$.

Definizione 3 – Sia $s \geq 0$. Definiamo

$$H^s(T^N) = \left\{ f \in L^2(T^N) : (1+|h|^2)^{s/2}\widetilde{f}(h) \in L^2(\mathbb{Z}^N, \mu) \right\}.$$

Ovviamente $H^0(T^N) \equiv L^2(T^N)$, e $s' < s \Longrightarrow H^s(T^N) \subset H^{s'}(T^N)$.

Lo spazio $H^s(T^N)$ è dotato di prodotto scalare nel modo seguente:

$$\langle f, g\rangle_{H^s(T^N)} = \sum_{h\in\mathbb{Z}^N} (1+|h|^2)^s \widetilde{f}(h)\overline{\widetilde{g}(h)}\,. \tag{1}$$

In perfetta analogia con il caso unidimensionale, $H^s(T^N)$ è uno spazio di Hilbert, e un sistema ortonormale massimale in $H^s(T^N)$ è dato da

$$\left\{ \frac{1}{(1+|h|^2)^{s/2}}\, e^{ih\cdot x} \right\}_{h\in\mathbb{Z}^N} .$$

Osserviamo, inoltre, che $f \in H^s(T^N) \Longrightarrow \partial_i f \in H^{s-1}(T^N)$.

Il teorema 1, un teorema di immersione, si estende facilmente al caso N qualsiasi; occorre però prestare attenzione al fatto che l'esponente oltre il quale si ha immersione in $C(T^N)$ dipende da N:

Teorema 2 – *Sia $s > N/2$. Allora $H^s(T^N) \subset C(T)$, ed esiste $C_s < \infty$ tale che*

$$\|f\|_\infty \leq C_s \|f\|_{H^s} \quad \forall f \in H^s(T^N)\,.$$

Dim.

La dimostrazione è del tutto analoga a quella del teorema 1, e non la ripeteremo; vale solo la pena di osservare che, essendo l'indice h N–dimensionale, la serie

$$\sum_{h\in\mathbb{Z}^N} \frac{1}{(1+|h|^2)^{s/2}}$$

appartiene a l^2 se e solo se $2s > N$, ovvero $s > N/2$, che è appunto l'ipotesi del teorema

■

Corollario 2 – *Sia $k \in \mathbb{N}$, e $s > k + N/2$. Allora $H^s(T^N) \subset C^k(T^N)$, ed esiste $C_s < \infty$ tale che*

$$\|f\|_{C^k} \leq C_s \|f\|_{H^s(T^N)} \quad \forall f \in H^s(T^N)\,.$$